

# 裂缝体的弹性模量和裂缝密度

田锋

河海大学水资源环境学院, 南京, 210037

**内容提要:**当岩石中含有裂缝时,岩石的弹性模量(主要指体模量、剪切模量、泊松比以及地震波的速度)会发生变化,而且这种弹性模量的变化又随裂缝中是否含有流体而不同。如果我们用地震的方法探测出地下目的层弹性模量的变化情况,无疑对我们了解目的层的裂缝发育情况将会有很大的帮助。在以往的研究中,人们常常把裂缝的产状定义成垂直裂缝和水平裂缝来研究。但是,实际中存在的裂缝多表现为几种体系的裂缝分布。本文在假设裂缝是随机分布的情况下,研究了含流体裂缝体和不含流体裂缝体的弹性模量与裂缝密度的关系。

**关键词:** 裂缝;弹性模量;地震勘探;地震反演;地震转换波

随着油气勘探事业的进一步发展,勘探难度不断加大。目前,在油气勘探上,除了寻找构造油气藏和岩性油气藏之外,寻找裂缝性油气藏已显得越来越重要。如在四川盆地、塔里木盆地和苏北盆地等探区,迫切需要用地震勘探的方法寻找目的层的裂缝发育带。

储层裂缝是指由变形作用或物理成岩作用形成的、在岩石中天然存在的宏观的面状不连续体。这是对裂缝的广义定义,大至断裂小至微裂隙均包含在内。裂缝性油气储集层是指油气的储集空间和渗透通道主要为裂缝及其连通的溶孔、溶洞的油气储集层。

裂缝在许多油气藏中是流体或气体流动的重要通道,正确识别和预测裂缝及其发育方向,对油气藏勘探和开发有着十分重要的意义。识别裂缝是寻找裂缝性气藏的最终目标。根据固体力学理论,裂缝性地层表现为介质的各向异性,因此,裂缝研究的理论基础是介质的各向异性理论。所谓各向异性是指介质弹性参数随方向而不同的特性,具体来说是指波在介质中传播时由于方向和偏振的变化而引起物理性质测量值的变化。通常研究的各向异性有PLT(Periodic Thin Layer 或者 TIV、Transverse Isotropy with Vertical axis)、EDA (Extensive Dilatancy Anisotropy, 或者 TIH、Transverse Isotropy with Horizontal axis)和PLT+EDA各向异性。其中,EDA各向异性又称方位各向异性,在

裂缝性气藏的研究中具有特别重要的意义。

据统计,裂缝性油气田的储量为我国油气探明储量的三分之一左右。在今后的油气田勘探和开发领域里,裂缝性储集层的地位将会越来越重要,人们迫切需要预测裂缝及其发育带的有效方法。

## 1 裂缝体弹性模量的一般表达式

在周围存在静应力  $P$  状态下,一个无裂缝均匀各向同性体的势能  $\phi$  可表示为

$$\phi = -\frac{P^2 V}{2K} \quad (1)$$

式中,  $K$  是材料的体模量,  $V$  是总体积。

现假设,在外部载荷不变的情况下,引入随机裂缝而产生的势能变化为  $\Delta\phi$ ,此时,裂缝体的有效体模量  $\bar{K}$  可以用下式定义

$$-\frac{P^2 V}{2\bar{K}} = -\frac{P^2 V}{2K} + \Delta\phi \quad (2)$$

由于引入裂缝体,系统释放的能量。我们称这种由于裂缝而引起的能量损失为裂缝能量,用  $\xi$  表示,具有如下形式

$$\xi = \frac{P^2 a^3}{E} f(\bar{\nu}) \quad (3)$$

式中,  $a$  是一个特定的线性裂缝尺寸;  $\bar{E}$  是裂缝体的有效杨氏模量;  $\bar{\nu}$  是材料的有效泊松比;  $f$  是无量纲形状因子,它取决于裂缝体的有效泊松比  $\bar{\nu}$  和裂缝形状。

系统的能量变化可表示为:

$$\Delta\phi = -\frac{P^2}{E} \sum a^3 f(\bar{v}) \quad (4)$$

将式(4)代入式(2), 并利用关系式  $\frac{\bar{E}}{K} = 3(1 - 2\bar{v})$ , 得

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{2N \langle a^3 f(\bar{v}) \rangle}{3(1 - 2\bar{v})} \quad (5)$$

式中,  $N$  是单位体积的裂缝数, 角括号表示平均。

如果裂缝的尺寸和形状无关, 则式(5)可由下式替换

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{2N \langle a^3 \rangle \langle f(\bar{v}) \rangle}{3(1 - 2\bar{v})} \quad (6)$$

同理, 引入单轴张量  $s$ , 使用有效杨氏模量表达的裂缝体能量方程有

$$-\frac{s^2 V}{2E} = -\frac{s^2 V}{2E} + \Delta\phi \quad (7)$$

下面考虑与一个单一裂缝的裂缝能量。设垂直裂缝平面的单位矢量为  $m$ , 裂缝平面的特征方向的单位矢量为  $t$ 。我们将影响裂缝能量的应力分解为正应力  $\sigma$  (垂直裂缝面) 和剪切应力  $\tau$  (正切于裂缝面), 裂缝的能量是应力的二次函数。 $\sigma$  和  $\tau$  的作用在各向异性介质中可分开表达, 因此

$$\xi = \frac{a^3}{E} [\sigma^2 f(\bar{v}) + \tau^2 g(\bar{v}, \beta)] \quad (8)$$

式中,  $g(\bar{v}, \beta)$  是一个无量纲形状因子, 它也依赖于剪切应力矢量和裂缝特征方向  $t$  之间的夹角  $\beta$ ,  $\beta = [0 \sim \pi]$ 。 $\sigma$  与  $s$  之间的夹角为  $\alpha$ ,  $\alpha = [0 \sim \pi/2]$

由图 1 得

$$\begin{cases} \sigma = s \cos^2 \alpha \\ \tau = s \sin \alpha \cos \alpha \end{cases} \quad (9)$$

把式(9)代入式(8)和式(7), 得到

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - 2N \langle a^3 (f(\bar{v})) \cos^4 \alpha + a^3 g(\bar{v}, \beta) \rangle$$

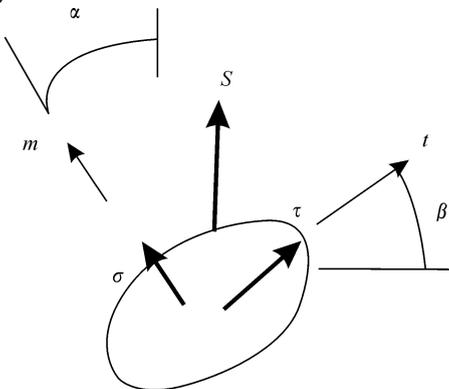


图 1 裂缝面和应力分解

Fig. 1 Crack plane and its stress analysis

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (10)$$

假设裂缝的尺寸、形状以及方位彼此无关。利用  $\langle \cos^4 \alpha \rangle = \frac{3}{8}$ ,  $\langle \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{8}$ , 代入式(10), 得

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{N \langle a^3 \rangle}{4} [3 \langle f(\bar{v}) \rangle + \langle g(\bar{v}, \beta) \rangle] \quad (11)$$

方程(11)和(6)给出了确定  $\bar{K}$ 、 $\bar{E}$  和  $\bar{v}$  的一般方程。但是, 如果要使用它们, 还必须首先估计出式中的能量项(有关裂缝的形状)。

## 2 与应力强度有关的裂缝能量

假设在各向同性介质中存在一任意形状的平裂缝, 裂缝表面承受一定的外部应力。设  $S$  是沿裂缝边缘  $C$  的长度,  $r$  是从  $C$  到在裂缝平面中一点的垂直向外的距离,  $z$  是垂直于裂缝平面的坐标轴, 见图(2)。因此,  $(r, s, z)$  构成一右手坐标系。在裂缝边界附近, 应力和应变状态可分解为平面应变状态  $\sigma_z, \sigma_r$  和  $\tau_{rz}$  及剪应力状态  $\tau_{rs}, \tau_{zs}$ 。应力强度系数可表达成

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_z(r, s, 0) \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{rz}(r, s, 0) \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{zs}(r, s, 0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

根据弹性静力学能量守恒定律:

$$M = \int_S \{ W_{x \cdot n} - [(x \cdot \nabla)U] \cdot T - \frac{1}{2} T \cdot U \} ds \quad (13)$$

式中,  $x$  是位置矢量;  $U$  是弹性位移;  $T$  是在  $S$  面上的张力;  $n$  是垂直于  $S$  向外的单位矢量;  $W$  是应变能量密度;  $\nabla$  是梯度算子。上式对于完全包围裂缝的所有表面  $S$  的积分具有相同的值。

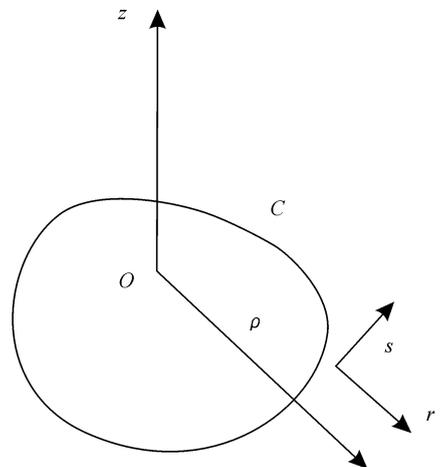


图 2 基于裂缝的坐标

Fig. 2 Coordinate of the crack

如果  $C$  中的每一点的能量向外以正比于距离呈放射状衰减,那么,裂缝释放的能量可以写成 (Budiansky and Rice,1973)

$$a \frac{\partial \xi}{\partial a} = M \quad (14)$$

式中,  $a$  是测量裂缝尺寸的特定长度。现把原点放在裂缝面上,选择  $S$  围绕裂缝边界  $C$  形成一个通道。通道的截面是圆,半径为  $\delta$ 。那么,由于在裂缝面上  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T} = 0$ ,对于  $M$  的表达式简化为

$$M = \oint_C \lim_{\delta \rightarrow 0} \{ \dots \} dls \quad (15)$$

$U$  和  $\frac{\partial U}{\partial S}$  是边界  $C$  上的值;对于  $\delta \rightarrow 0$ ,  $x$  在裂缝平面附近;从而  $M$  进一步简化为

$$M = \oint_C \rho(s) \lim_{\delta \rightarrow 0} (W_{nr} - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{S}}) dls \quad (16)$$

式中,  $\rho(s)$  是从原点到  $C$  上  $s$  点处的切线的垂直距离,  $n_r$  是  $\mathbf{n}$  的  $r$  分量。上式的内部积分是 Rice 二维裂缝机理的  $J$  积分。对于任何一组平面应力和剪应力状态,根据应力强度系数给出  $J$

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} [K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 / (1+\nu)] \quad (17)$$

由于平面应力和反平面剪切应力接近  $\delta \rightarrow 0$ ,因此由式(16)得到

$$a \frac{\partial \xi}{\partial a} = \frac{1-\nu^2}{E} \oint_C \rho [K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 / (1+\nu)] ds \quad (18)$$

对于无限体中存在单一裂缝的情况,  $K$  必然正比于  $\sqrt{a}$ 。因此,总的裂缝能量可以表达成

$$\xi = \frac{1-\nu^2}{3E} \oint_C \rho [K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2 / (1+\nu)] ds \quad (19)$$

从式(19)看出,已知  $K_I$ 、 $K_{II}$  和  $K_{III}$  的边界分布情况,就可以求取无限各向同性体中的任一裂缝的裂缝能量。问题是如何寻找  $K_I$ 、 $K_{II}$  和  $K_{III}$ 。

### 3 椭圆裂缝能量

为了便于讨论,假设裂缝的形状是椭圆的。设在  $xy$  平面上有一椭圆裂缝,其主半轴为  $a$ ,短半轴为  $b$ 。在一个无限、均匀的弹性体中穿过裂缝的位移间断为  $[\mathbf{U}] = \mathbf{U}(x, y, 0^+) - \mathbf{U}(x, y, 0^-)$ ,具有如下形式

$$[\mathbf{U}] = (ab)^{\frac{1}{2}} [1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}]^{\frac{1}{2}} \mathbf{A} \quad (20)$$

式中,  $\mathbf{A}$  是常数矢量,具有形式  $i\mathbf{A} + j\mathbf{B} + k\mathbf{C}$ 。如果介质是各向同性体,施加的应力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ,使  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ;外部应力  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  仅分别对  $A, B, C$  为非零。

根据二维平面上椭圆形裂缝主应变的表达式,应力强度系数可表达为

$$K_I = \frac{A(\pi ab)^{\frac{1}{2}}}{4(1-\nu^2)} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (21)$$

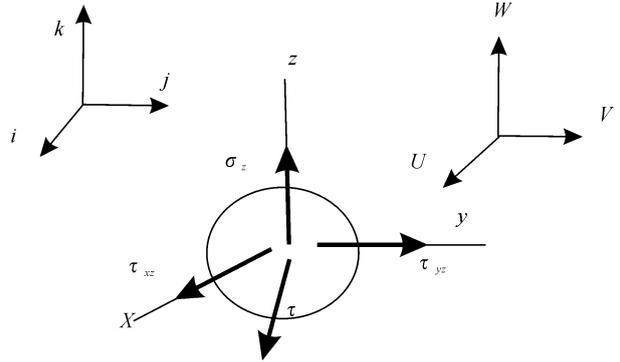


图 3 椭圆裂缝和应力分解

Fig. 3 Ellipsoidal crack and its stress analysis

利用上式,根据式(19)可以求出裂缝能量  $\xi$ 。使用变量代换  $\bar{x}a \cos \phi, \bar{y} = b \sin \phi$  以及  $\rho ds = abd\phi$ ,由式(19)式得

$$\xi = \frac{\pi}{12(1-\nu^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \phi]^{\frac{1}{2}} d\phi = \left[ \frac{\pi}{12(1-\nu^2)} \right] E(k) \quad (22)$$

式中,  $E(k)$  是具有变量  $k = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$  的第二类椭圆积分。

另外,  $\xi$  也可以用另一种方法得到。因为它应等于应力作用通过每一裂缝面的位移所作的功,那么

$$\xi = \frac{\sigma}{2} \iint [W] dx dy = \frac{\pi \sigma (ab)^{\frac{3}{2}} A}{3} \quad (23)$$

由方程(22)和(23)得:

$$\xi = \frac{4\pi \sigma^2 a^2 b}{E(k)} \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \quad (24)$$

同时,我们也得到:

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi b/a}}{E(k)} (b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{4}} \quad (25)$$

用  $\bar{E}$  和  $\bar{\nu}$  代换式(24)中的  $E$  和  $\nu$ ,与式(8)比较得:

$$f(\bar{\nu}) = \left( \frac{4\pi}{3} \right) \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{1-\bar{\nu}^2}{E(k)} \right) \quad (26)$$

同理,应用剪切应力  $\tau_{xz}$ ,我们有:

$$[u] = B(ab)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (27)$$

同理,有:

$$K_{\parallel} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} E c_r}{8(1-\nu^2)} \quad (28)$$

$$K_{\text{III}} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} E c_s}{4(1+\nu)} \quad (29)$$

其中,

$$\begin{Bmatrix} c_r \\ c_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \cos \phi \\ -a \sin \phi \end{Bmatrix} B (2)^{\frac{1}{2}} (b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{4}} \quad (30)$$

将式(25)、式(28)和式(29)代入式(19)得

$$\xi = \frac{\pi}{12} \frac{B^2 a^2 b}{(1-\nu^2) k^2} [(k^2 - \nu) E(k) + \nu k_1^2 K(k)] \quad (31)$$

式中,  $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - k^2 \sin^2 \phi] d\phi$  是第一类椭圆积分,  $k_1 = 1 - k^2$ 。独立计算  $\xi$  得

$$\xi = \frac{\tau_{xz}}{2} \iint [u] dx dy = \frac{\pi \tau_{xz} (ab)^{\frac{3}{2}} B}{3} \quad (32)$$

当  $\tau_{xz} = \tau \cos \beta$ ,  $\tau_{yz} = \tau \sin \beta$ , 有

$$\xi = \frac{4\pi \nu^2 a b^2}{3} \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \{ R(k, \nu) \cos^2 \beta + Q(k, \nu) \sin^2 \beta \} \quad (33)$$

式中

$$R(k, \nu) = k^2 [(k^2 - \nu) E(k) + \nu k_1^2 K(k)]^{-1} \quad (34)$$

$$Q(k, \nu) = k^2 [(k^2 + \nu k_1^2) E(k) - \nu k_1^2 K(k)]^{-1}$$

同时,有

$$K_{\parallel} = \frac{\tau \sqrt{\pi b/a} [bR(k, \nu) \cos \beta \cos \phi + aQ(k, \nu) \sin \beta \sin \phi]}{[b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi]^{\frac{1}{4}}} \quad (35)$$

$$K_{\text{III}} = \frac{\tau(1-\nu) \sqrt{\pi b/a} [-aR(k, \nu) \cos \beta \cos \phi + bQ(k, \nu) \sin \beta \sin \phi]}{[b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi]^{\frac{1}{4}}} \quad (36)$$

比较式(33)与式(8),得

$$g(\bar{\nu}, \beta) = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{b}{a} \right)^2 (1-\bar{\nu}^2) [R(k, \bar{\nu}) \cos^2 \beta + Q(k, \bar{\nu}) \sin^2 \beta] \quad (37)$$

使用上述公式,我们可以进一步估计含有椭圆裂缝的固体弹性模量。

## 4 含裂缝体的有效弹性模量

### 4.1 干裂缝情况

进一步简化假设,设所有裂缝是椭圆的,且具有相同的尺寸  $b/a$ 。将式(26)代入式(6)得

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{8\pi N \langle ab^2 \rangle (1-\bar{\nu}^2)}{9(1-2\bar{\nu}) E(k)} \quad (38)$$

由于裂缝的面积是  $A = \pi ab$ , 周长是  $\rho = 4aE(k)$ , 所以,式(4.38)又能写成

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{16}{9} \left( \frac{1-\bar{\nu}^2}{1-2\bar{\nu}} \right) \epsilon \quad (39)$$

式中,  $\epsilon$  是裂缝密度参数

$$\epsilon = \frac{2N}{\pi} \left\langle \frac{A^2}{\rho} \right\rangle \quad (40)$$

由上式可见,式(40)不明显依赖于裂缝尺寸  $b/a$ 。那么,在圆裂缝情况下,裂缝密度参数简化为  $\epsilon = N \langle a^3 \rangle$ 。显然,只要椭圆裂缝的尺寸和纵横比是无关系的,式(40)仍然对包含有变量为  $b/a$  的椭圆裂缝有效。

对于固定的  $b/a$ ,由式(37)估计  $\langle g(\bar{\nu}, \beta) \rangle$

$$\langle g(\bar{\nu}, \beta) \rangle = \frac{2\pi}{3} (b/a)^2 (1-\bar{\nu}^2) [R(k, \bar{\nu}) + Q(k, \bar{\nu})] \quad (41)$$

式中利用了  $\langle \cos^2 \beta \rangle = \langle \sin^2 \beta \rangle = \frac{1}{2}$ 。

将式(26)  $\langle f(\bar{\nu}) \rangle$  和式(37)  $[g(\bar{\nu}, \beta)]$  代入式(11),得

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{(1-\bar{\nu}^2)}{3} [6 + T(b/a, \bar{\nu})] \epsilon \quad (42)$$

式中

$$T(b/a, \bar{\nu}) = E(k) [R(k, \bar{\nu}) + Q(k, \bar{\nu})] \\ = k^2 E(k) \{ [(k^2 - \bar{\nu} E(k) + \bar{\nu} k_1^2 K(k))^{-1} + \\ [(k^2 + \bar{\nu} k_1^2) E(k) - \bar{\nu} k_1^2 K(k)]^{-1} \} \quad (43)$$

其中  $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - k_1^2$

利用  $\bar{K}$ 、 $\bar{E}$  和  $\bar{\nu}$  的关系式  $\bar{E}/\bar{K} = 3(1-2\bar{\nu})$ , 得裂缝密度的关系式

$$\epsilon = \frac{18(\nu - \bar{\nu})}{(1-\bar{\nu}^2) [2(18\nu - 1) - 3(1-2\nu)T]} \quad (44)$$

由  $\bar{K}$ 、 $\bar{E}$  和  $\bar{\nu}$  的关系式与  $K$ 、 $E$  和  $\nu$  的关系式,得

$$2(\nu - \bar{\nu}) = (1-2\bar{\nu}) \left( 1 - \frac{\bar{K}}{K} \right) - (1-2\nu) \left( 1 - \frac{\bar{E}}{E} \right) \quad (45)$$

由上式可见,对于给定的  $\nu$  值,  $\bar{\nu}$  与  $\epsilon$  有着十分密切的关系,且  $\epsilon$  是  $\bar{\nu}$  的减函数。当  $\bar{\nu} \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 9/16$ 。其物理意义是增加交错裂缝网,破坏了材料的相干性,以  $\epsilon \rightarrow 9/16$  为裂缝密度的极限值。

同理,利用弹性模量关系式,可以得到关于  $\epsilon$  与  $\bar{G}/G$  的关系式

$$\text{因为 } \frac{1}{G} - \frac{3}{E} + \frac{1}{3K} = 0, \text{ 所以} \\ 1 - \frac{\bar{G}}{G} - \frac{3\bar{G}}{E} \left( 1 - \frac{\bar{E}}{E} \right) - \frac{\bar{G}}{3K} \left( 1 - \frac{\bar{K}}{K} \right) = 0 \quad (46)$$

$$\text{或 } 2 \left( 1 - \frac{\bar{G}}{G} \right) (1 + \bar{\nu}) - 3 \left( 1 - \frac{\bar{E}}{E} \right) + \\ (1 - 2\bar{\nu}) \left( 1 - \frac{\bar{K}}{K} \right) = 0 \quad (47)$$

从而有:

$$\frac{\bar{G}}{G} = 1 - \frac{35}{9}(1-\bar{v})\left[1 + \frac{9}{70}T(b/a, \bar{v})\right]\epsilon \quad (48)$$

对于圆裂缝  $\frac{b}{a} = 1$ ,  $T = \frac{4}{(2-\bar{v})}$ ,  $\epsilon = N\langle a^3 \rangle$ , 方

程(42)、(48)和(44)简化为

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{(1-\bar{v})(16-6\bar{v})}{3(2-\bar{v})}\epsilon \quad (49)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = 1 - \frac{(1-\bar{v})(88-35\bar{v})}{9(2-\bar{v})}\epsilon \quad (50)$$

$$\epsilon = \frac{18(v-\bar{v})(2-\bar{v})}{(1-\bar{v}^2)[16(6v-1)+2\bar{v}(1-18v)]} \quad (51)$$

在长椭圆( $b/a \rightarrow 0$ )情况下, 有  $T = (2-\bar{v})/(1-$

$\bar{v})$ ,  $\epsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)N\langle ab^2 \rangle$ , 上述方程变成

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{1}{3}(1+\bar{v})(8-7\bar{v})\epsilon \quad (52)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = 1 - \frac{1}{18}(88-79\bar{v})\epsilon \quad (53)$$

$$\epsilon = \frac{18(v-\bar{v})}{(1-\bar{v}^2)(42v-5)} \quad (54)$$

从上述方程可见, 只要裂缝的方位是随机的, 与裂缝的尺寸和形状无关, 那么, 裂缝的密度参数对于裂缝面的比值  $b/a$  并不敏感。在这种意义下, 似乎有关圆裂缝的结果可以用于所有形状的裂缝。

#### 4.2 有效弹性模量(含流体裂缝)

设椭圆裂缝体积为  $V_c$ , 引入一新参量:

$$\omega = \frac{8}{3}\left(\frac{A^2}{pV_c}\right)\left(\frac{\bar{K}}{K}\right) \quad (55)$$

由于椭球体体积  $V_c = \frac{4}{3}\pi abc$ , 因此, 对于薄的

球裂缝( $a=b \gg c$ ), 有  $\omega = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{\bar{K}}{K}\right)$ ; 对于薄椭圆球

裂缝( $a \gg b \gg c$ ), 有  $\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{\bar{K}}{K}\right)$ ; 干裂缝情况下,

$\bar{K} \rightarrow 0$ ,  $\omega = 0$ 。

由于应力  $\sigma$  作用于裂缝体, 流体将获得某些静水应力  $\tilde{\sigma}$ , 因而增加的应变能为

$$\frac{\tilde{\sigma}^2}{2\bar{K}}V_c \quad (56)$$

另外, 应力  $\tilde{\sigma}$  作用于裂缝表面, 增加围绕体系统的能量, 由(2)式有

$$\frac{a^3 f(\bar{v})\tilde{\sigma}^2}{E} \quad (57)$$

上述能量等于静水压力  $p$  缓慢作用于裂缝表

面所作的功。式(56)和式(57)的能量必然是从干裂缝释放的能量(式(8))获得, 从而有

$$\xi = \frac{a^3 f(\bar{v})\tilde{\sigma}^2}{E} \left\{ 1 - \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma}\right)^2 (1+\gamma) \right\} + \frac{a^3 g(\bar{v})\tau^2}{E} \quad (58)$$

式中:

$$\gamma = \frac{3(1-2\bar{v})\bar{K}V_c}{2f(\bar{v})\bar{K}a^3} \quad (59)$$

因为流体不能携带剪切应力, 所以  $\tau$  不影响能

量。为了计算  $\tilde{\sigma}$ , 使流体的体积变化  $\left(\frac{\tilde{\sigma}}{K}\right)V_c$  等于裂

缝体积的变化  $(2a^3 f(\bar{v})/E)(\sigma - \bar{\sigma})$ , 有:  $\sigma/\bar{\sigma} = (1 + \gamma)^{-1}$

那么:

$$\epsilon = \frac{a^3}{E} \{ f(\bar{v})D\sigma^2 + g(\bar{v})\tau^2 \} \quad (60)$$

式中:

$$D = \frac{\gamma}{1+\gamma} \quad (61)$$

在椭圆裂缝情况下, 由式(59)、式(61)和式(55), 得

$$D = \left[ 1 + \frac{4}{3\pi} \left(\frac{K}{\bar{K}}\right) \left(\frac{1-\bar{v}^2}{1-2\bar{v}}\right) \omega \right]^{-1} \quad (62)$$

式中,  $\omega$  由式(55)给出。根据上述, 用  $f(\bar{v})D$  代换式(6)和式(11)中的  $f(\bar{v})$ , 得到如下含流体裂缝体的弹性模量公式

$$\frac{\bar{K}}{K} = 1 - \frac{16}{9} \left(\frac{1-\bar{v}^2}{1-2\bar{v}}\right) D\epsilon \quad (63)$$

$$\frac{\bar{E}}{E} = 1 - \frac{(1-\bar{v}^2)}{3} [6D + T]\epsilon \quad (64)$$

$$\frac{\bar{G}}{G} = 1 - \frac{35}{9}(1-\bar{v}) \left[ D + \frac{9}{70T} \right] \epsilon \quad (65)$$

$$\epsilon = \frac{18(v-\bar{v})}{(1-\bar{v}^2)[2D(18-1) - 3(1-2v)T]} \quad (66)$$

由式(63)和式(66), 消去  $D$ , 得:

$$\epsilon = \frac{9(1-2\bar{v})(18v-1)(1-\bar{K}/K) - 144(v-\bar{v})}{24(1-\bar{v}^2)(1-2v)T} \quad (67)$$

由式(65)和式(66), 消去  $D$ , 得:

$$\epsilon = \frac{3[(1+\bar{v})(18v-1)(1-\bar{G}/G) - (v-\bar{v})]}{(1-\bar{v}^2)(26v-1)T} \quad (68)$$

式(67)和式(68)即是在含有流体情况下, 裂缝密度与弹性模量的关系式。

由式(43), 知: 对于圆裂缝情况( $b/a = 1$ ), 有:

$$T = \frac{4}{2 - \bar{\nu}} \tag{69}$$

对于长椭圆情况( $b/a=0$ ), 有:

$$T = \frac{2 - \bar{\nu}}{1 - \bar{\nu}} \tag{70}$$

将式(69)代入式(68), 并利用下列关系式, 得到裂缝密度与速度的关系:

$$\begin{cases} \frac{\bar{V}_s}{V_s} = \left(\frac{\bar{G}}{G}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{V_p}{V_s} = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\bar{V}_p}{\bar{V}_s} = \left[\frac{2(1-\bar{\nu})}{1-2\bar{\nu}}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \epsilon = \frac{3}{16} \frac{[3(\frac{\bar{V}_p}{\bar{V}_s})^2 - 2] \{ [1 - (\frac{\bar{V}_s}{V_s})^2] [3(\frac{\bar{V}_p}{V_s})^2 - 4] [17(\frac{V_p}{V_s})^2 - 35] - 2 [(\frac{\bar{V}_p}{\bar{V}_s})^2 - 2] [(\frac{V_p}{V_s})^2 - 1] \}}{[2(\frac{\bar{V}_p}{\bar{V}_s})^2 + 3] [12(\frac{V_p}{V_s})^2 - 25]} \end{cases} \tag{71}$$

式中,  $\bar{V}_p$  和  $\bar{V}_s$  是  $P$  波和  $S$  波在无裂缝体中的速度。 $V_p$  和  $V_s$  是  $P$  波和  $S$  波在含裂缝体中的速度。式(71)适用于裂缝含流体情况下裂缝密度的计算。

### 5 应用实例

在西部某地区奥陶系地层中广泛发育有裂缝, 是油气的良好储集层。为了预测该区的裂缝发育带, 在该区实施了二维转换波地震勘探。为了验证上面我们推导的裂缝计算公式(式 71), 建立如下处理流程, 见图 4。

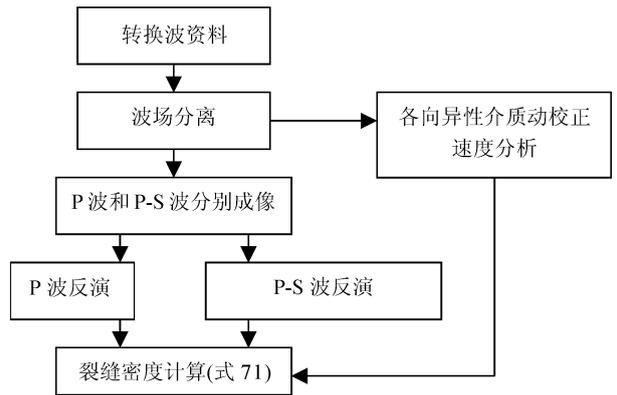


图 4 裂缝预测计算流程

Fig. 4 Calculated circuit of crack prediction

图 5 是使用上述流程应用转换波地震资料计算的地下裂缝密度的二维剖面, 在过井的位置时间 3.7

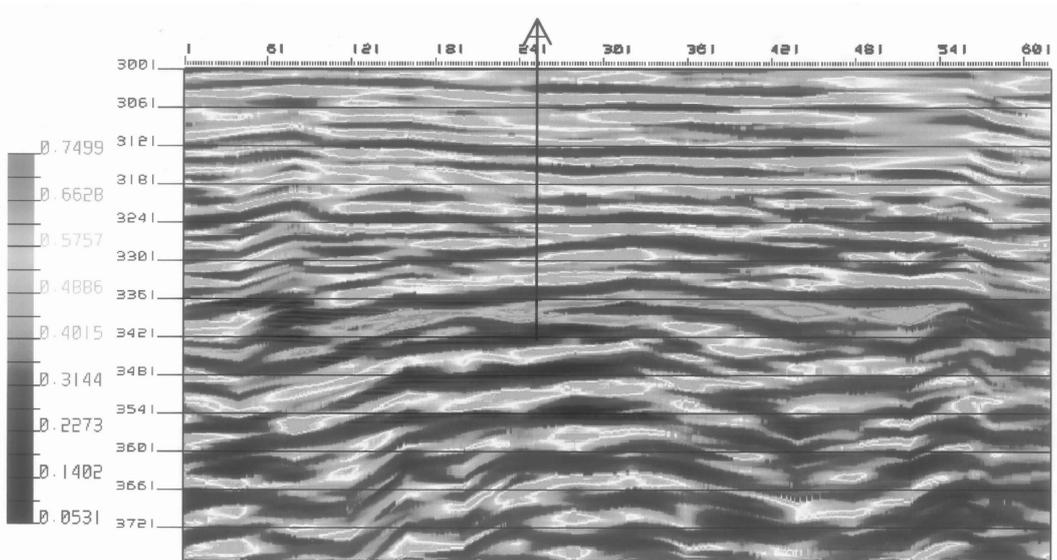


图 5 地下裂缝密度的二维剖面

Fig. 5 Two-dimensional section of the underground crack density

秒附近预测有相对发育的裂缝带,与钻井结果基本吻合。

## 6 结 论

本文中裂缝体的弹性模量与裂缝密度的关系公式是在假设固体介质中的裂缝是随机分布的情况下推导出来的,因此,用上述公式计算得到的地下介质的裂缝密度具有一定的统计意义。在实际应用中,可以通过多波地震勘探方法获取地下介质的纵波和横波速度,然后用本文公式计算介质的裂缝密度。

### 参 考 文 献

范高尔夫-拉特 T D. 1989. 裂缝油藏工程基础. 陈钟祥,金玲年,秦同

洛译. 北京:石油工业出版社.

Budiansky B. 1965. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. MechPhys. Solids*, 13: 223~227.

Budiansky B, Rice J R. 1973. Coservation laws and energy-release rates. *Journal of applied mechanics*, 3:201~203.

Budiansky B, Richard J O. 1976. Elastic moduli of a ctacked solid. *Int. J. Solids Structures*, 12:81~97.

Hoening A. 1979. Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *Int. J. Solids Structures*, 15:137~154.

Richard J O, Bernard B. 1974. Seismic velocities in dry and saturated cracked solids. *J. Geophys. Res*, 79(35):5412~5425.

Thomsen L. 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*. 51(10):1954~1966.

## Elasticity Modulus and Fracture Density in the Rocks with Crevices

TIAN Feng

*College of Water Resources and Environment, Nanjing, 210037*

### Abstract

Fractures in rocks greatly affect their elasticity moduli such as bulk modulus, shear modulus, Poisson's ratio and seismic wave velocity; and the change of such kind will differ with types of liquid in fractures. If seismic method can detect the changing of elasticity modulus in target strata, it will no doubt help us further understand the development of fractures. Previous study only focused on vertical and horizontal fractures, but the fractures occur as more forms of distribution. The paper studied the elasticity modulus and fracture density of the rocks which contain both fluid and no fluid only under the condition that fractures are randomly distributed.

**Key words:** fracture; elasticity modulus; seismic exploration; seismic inversion; converted wave