文章编号:1004-4965(2007)06-0617-06

# UKF 滤波算法在数据同化中的应用

## 黄春林 , 李新

(中国科学院寒区旱区环境与工程研究所,甘肃 兰州 730000)

摘 要:介绍了一种新的数据同化算法(UKF, Unscented Kalman Filter),该算法不需要计算伴随矩阵,就能 够解决模式的非线性问题。以 Lorenz 系统为例,进行了数据同化的数值试验。结果表明:基于 UKF 的同化方 案与背景场的初始值无关,它能有效地抑制状态变量误差的增长,同化结果精度高。

 关 键 词:UKF 滤波;
 数据同化;
 Lorenz 模型

 中图分类号:P435
 文献标识码:A

## 1 引 言

数据同化是在模式动态运行过程中融入新的观 测数据来提高模式预报精度的方法,已被广泛地应用 于大气、海洋、水文等领域[1-10],其主要方法有两类: 变分同化和惯序同化。卡尔曼滤波<sup>[6]</sup>(KF)是惯序同化 算法的一种,被用于简单的线性模型的数据同化中, 它不但可以得到最优的状态估计,而且可以对误差进 行评价。为了把卡尔曼滤波应用到非线性系统中,扩 展卡尔曼滤波(EKF , Extented Kalman Filter)算法被提 出,它利用泰勒公式求一阶导数的方法对模型算子进 行线性化,估计精度只能达到一阶。对于强非线性、 不连续系统, EKF 性能极不稳定, 甚至发散。此外, 雅克比(Jacobian)矩阵的计算非常复杂且容易出错。 UKF 算法是一种非线性变换估计方法,它由牛津大 学 Julier、Uhlmann 等<sup>[11-13]</sup>于 1994 年首次提出,其后 又得到美国学者 Wan、Van der Merwe<sup>[14]</sup>的进一步发 展。它不需要发展线性和伴随模式,利用少量的 Sigma 点经过 U 变换(Unscented 变换)来进行非线性 模型的状态和误差协方差的递推和更新。与 EKF 相 比, UKF 能更好地逼近模型的非线性特性, 能更精 确地估计非线性系统中的后验均值和协方差(可以精 确到三阶)<sup>[12]</sup>。在算法实现上 UKF 不需要计算雅克比

(Jacobian)矩阵,更容易实现。UKF 方法已被广泛用于信号处理、目标追踪等领域<sup>[13-14]</sup>,但是在数据同化方面的应用较少。

本文首先介绍了 UKF 滤波算法的基本原理,然 后以 Lorenz 系统为例,通过数值试验对 UKF 算法的 性能进行了初步探讨。

## 2 UKF 滤波的基本原理

#### 2.1 U 变换

假设 L 维随机向量 X 的均值为  $\overline{X}$  ,方差为  $P_X$  , M维随机向量 Y 为 X 的某一非线性函数 , 即 Y=g(X)。 向量 U 变换的思想就是将 X 的统计特征  $\overline{X}$  和  $P_X$  通过 非线性函数 g(X)进行传播得到 Y 的统计特征  $\overline{Y}$  和  $P_Y$ 。 为了计算 Y 的统计特征 , 按照以下方法得到 2L+1 个 Sigma 向量  $_i$ 和相应的权重  $W_i$ 。

首先,计算每个 Sigma 点的向量 ,和权重  $W_i$ 

$$\chi_{i} = \begin{cases} \overline{X} & (i=0) \\ \overline{X} + (\sqrt{(L+\lambda)P_{x}})_{i} & (i=1,\dots,L) \\ \overline{X} - (\sqrt{(L+\lambda)P_{x}})_{i} & (i=L+1,\dots,2L) \end{cases}$$

$$W_{i}^{(m)} = \begin{cases} \lambda/(n+\lambda) & (i=0) \\ 1/2(n+\lambda) & (i=1,\dots,2L) \end{cases}$$
(2)

收稿日期: 2006-09-04; 修订日期: 2007-03-28

基金项目:国家自然科学基金项目(90202014);国家重点基础研究发展项目(2001CB309404);中国科学院寒区旱区环境与工程研究所创新 课题 (CACX2003102);中国科学院西部行动计划(二期)项目(KZCX2-XB2-09)共同资助

作者简介: 黄春林,男,宁夏青铜峡人,在读博士研究生。主要从事陆面数据同化及定量遥感研究。E-mail: huangcl@lzb.ac.cn

$$W_i^{(c)} = \begin{cases} W_0^{(m)} + (1 - \alpha^2 - \beta) & (i = 0) \\ W_i^{(m)} & (i = 1, \dots, 2L) \end{cases}$$
(3)

其中 $\lambda = \alpha^2 (L+\kappa) - L$ 为一个比例因子。 决定  $\bar{x}$ 周围 Sigma 点的范围,取值范围为 1.0e-4 1;

是另一个比例因子,通常取值为 0, 用来合并 分 布 的 先 验 知 识 ( 对 于 高 斯 分 布 , = 2)。  $(\sqrt{(L+\lambda)P_x})_i$ 是矩阵均方根的第 i 列<sup>[12-16]</sup>。 $W_i^{(m)}$ 为求 一阶统计特征时的权系数; $W_i^{(c)}$ 为求二阶统计特征 时的权系数;在本试验中 = 1, =0, = 2。

这些 Sigma 点通过非线性函数  $\Upsilon_i = g(\chi_i)$  (*i*=0, 1, ...., 2*L*)传递,其均值 $\overline{Y}$ 、方差  $P_Y$ 可表示为

$$\overline{Y} \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \Upsilon_i$$
(4)

$$P_{\gamma} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\Upsilon_i - \overline{Y}) (\Upsilon_i - \overline{Y})^{\mathrm{T}}$$
(5)

2.2 UKF 滤波

把U变换应用到 Kalman 滤波的递推公式中就得 到了 UKF 算法。假设状态方程和观测方程分别为

$$\chi_{k}^{f} = F(\chi_{k-1}^{a}, W_{k-1})$$
(6)

$$y_k^j = H(\chi_k^j, v_k) \tag{7}$$

其中 $\chi_{k-1}^{a}$ 为 *k*-1 时刻模式的分析场(估计值), $\chi_{k}^{f}$ 、 $y_{k}^{f}$ 分别为 *k* 时刻状态变量的预报场和观测的预报场,  $w_{k-1}$ 、 $v_{k}$ 分别为模型误差和观测误差,它们是期望为 0 的高斯白噪声,方差矩阵分别为 *Q*、*R*。UKF 的具 体算法如下。

(1) 给定初始时刻状态的均值  $\bar{X}_0^a$ 和协方差矩阵 $P_0^a$ 。

(2) 利用  $k-1(k \in \{1, \dots, \infty\})$ 时刻状态的均值  $\bar{X}^{a}_{k-1}$ 和协方差矩阵  $P^{a}_{k-1}$ ,通过 U 变换得到该时刻每个 Sigma 点的状态向量  $\chi^{a}_{i,k-1}$ 

$$\chi_{i,k-1}^{a} = \begin{cases} \overline{X}_{k-1}^{a} & (i=0) \\ \overline{X}_{k-1}^{a} + (\sqrt{(L+\lambda)}P_{k-1}^{a})_{i} & (i=1,\dots,L) \\ \overline{X}_{k-1}^{a} - (\sqrt{(L+\lambda)}P_{k-1}^{a})_{i} & (i=L+1,\dots,2L) \end{cases}$$
(8)

(3) 时间更新。通过动力学方程,对每个 Sigma 点进行预报。

$$\chi_{i,k}^{f} = F(\chi_{i,k-1}^{a}, w_{k-1}) \qquad i=0, \ 1, \ \dots, \ 2L \tag{9}$$

$$\overline{X}_{k}^{f} = \sum_{i=0}^{2L} W_{i}^{(m)} \chi_{i,k}^{f}$$
(10)

$$P_{k}^{f} = \sum_{i=0}^{2L} W_{i}^{(c)} (\chi_{i,k}^{f} - \overline{X}_{k}^{f}) (\chi_{i,k}^{f} - \overline{X}_{k}^{f})^{T} + Q$$
(11)

$$y_{i,k}^{f} = H(\chi_{i,k}^{f}, v_{k})$$
  $i=0, 1, \dots, 2L$  (12)

$$\overline{Y}_{k}^{f} = \sum_{i=0}^{2L} W_{i}^{(m)} y_{i,k}^{f}$$
(13)

其中  $\chi_{i,k}^{f}$  ,  $y_{i,k}^{f}$  为 k 时刻第 i 个 Sigma 点的状态向量预 报值和通过观测方程计算的第 i 个观测向量的预报 值 ,  $\bar{X}_{k}^{f}$ 、  $\bar{Y}_{k}^{f}$  分别为 k 时刻状态向量预报场的平均值 和观测向量预报场的平均值 ,  $P_{k}^{f}$  为 k 时刻状态向量 预报场的协方差矩阵。

(4) 观测更新。

$$P_{k}^{yy} = \sum_{i=0}^{2L} W_{i}^{(c)} (y_{i,k}^{f} - \overline{Y}_{k}^{f}) (y_{i,k}^{f} - \overline{Y}_{k}^{f})^{\mathrm{T}} + R$$
(14)

$$P_{k}^{xy} = \sum_{i=0}^{2L} W_{i}^{(c)} (\chi_{i,k}^{f} - \overline{X}_{k}^{f}) (y_{i,k}^{f} - \overline{Y}_{k}^{f})^{\mathrm{T}}$$
(15)

$$K_{k} = P_{k}^{xy} (P_{k}^{yy})^{-1}$$
(16)

$$\overline{X}_{k}^{a} = \overline{X}_{k}^{f} + K_{k}(y_{k} - \overline{Y}_{k}^{f})$$
(17)

$$P_k^a = P_k^f - K_k P_k^{yy} (K_k)^{\mathrm{T}}$$
(18)

式中  $P_k^{yy}$  为 k 时刻观测向量预报场的协方差矩阵, $P_k^{xy}$  为 k 时刻状态向量和观测向量预报场的协方差矩阵,  $K_k$  为 k 时刻的 Kalman 增益矩阵, $\overline{X}_k^a$  为 k 时刻状态 向量分析场的平均值, $P_k^a$  为 k 时刻状态向量分析场 的协方差矩阵。

## 3 数值试验

#### 3.1 Lorenz 模型

Lorenz 模型是 1963 年 Lorenz 和 Saltzman 在研 究流体有限振幅对流时提出的非线性谱模式<sup>[17]</sup>,其 表达式为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -\sigma(x_1 + x_2) \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \rho x - y - xz \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,x_3}{\mathrm{d}\,t} = xy - \beta z \tag{21}$$

Lorenz 模型形式虽然简单,但它与大气系统有 很多相同的动力特征,所以 Lorenz 模型可以被用来 验证数据同化算法的性能。在本研究中,观测模型选 用简单的线性表达式

$$y_1 = x_1 + v_1$$
 (22)

$$y_2 = x_2 + v_2 \tag{23}$$

$$y_3 = x_3 + v_3$$
 (24)

我们给定初始场  $\overline{\chi}_0 = [x_1, x_2, x_3]^T = [1.5, -1.5, 25]^T$ , 时间增量 dt=0.01, 运行步长为 2 000, 在不考虑模型 误差和观测误差的前提下运行 Lorenz 模型,生成"真 实"观测数据,对"真实"观测数据的3个变量分 别加入方差为4的高斯白噪声生成带噪声的观测数 据。这两组数据将在下面的试验中用来验证同化结 果。从图 1 中我们看出 Lorenz 模型对初始场非常敏 感, x1 初始值发生微小的变化,经过一段时间曲线 会发生明显的变化。



图 1 Lorenz 模型不同初值的模拟结果 dt=0.01。 黑色和灰色曲线分别为初值(x1=1.5, x2=-1.5, x3=25)和初值(x1=1.501, x2=-1.5, x3=25)的模拟结果。

#### 3.2 同化结果

在本试验中,我们把初始场变为 $\overline{\chi}_0$  =  $[x_1, x_2, x_3]^{T} = [10, 10, 10]^{T}$ ,时间增量 dt=0.01,运行步长为 T = 2 000,状态变量的初始协方差矩阵( $P_0^a$ )、状态模型 误差协方差矩阵(Q)以及观测误差协方差矩阵(R)分别 为

$$P_0^a = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} 4.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 \end{pmatrix}$$

图 2 描述了每隔 20 步( obs=20)同化一次观测的 结果。从同化结果可以看出 UKF 算法能够很好地解决 非线性状态估计问题。尽管初始场偏离真实值较大, 但是同化几次观测数据后,同化结果快速接近真实值, 在观测误差较大的时刻也能得到满意的结果。图 3 反 映了同化变量误差随时间的变化。UKF 算法抗噪声能 力强,在整个运算过程中,误差变化比较稳定。

图 4 为背景场误差方差的时间变化特征。 在有观测的时刻估计误差方差明显下降,应用 UKF 滤波对状态估计有明显改进,有效抑制了误差的无约束增长。



620



## 4 结 论

本文引入了一种新的数据同化方法(UKF),使用 Lorenz 系统对该算法性能进行数据同化模拟试验。结 果表明该算法既有其它滤波算法所共有的特点,可以 解决模式的非线性问题,对初始场不敏感,能够有效 抑制了背景场误差的增长,并能得到精度较高的同化 结果<sup>[7]</sup>。同时较其他算法而言,UKF 算法具有很多优 势:(1) 与变分算法相比,UKF 算法不需要计算模式 的伴随矩阵;(2)与扩展卡尔曼滤波相比,UKF 算法 不需要计算雅克比(Jacobian)矩阵,避免了求导运算, 计算方便;(3)UKF 算法可以看作是一种 Monte-Carlo 方法,但是它只利用了少量确定的 Sigma 点来描述状 态的统计特征,与集合 Kalman 滤波算法相比,需要的 样本数量相对较少,因此计算速度快;(4)UKF 算法简 单,易于编程实现。所以从算法本身而言,UKF 算法 是一种很有前景的数据同化算法,但是对于 UKF 算法 在大气、海洋、陆地数据同化中的具体应用还有待于 进一步的验证和比较。

#### 参考文献:

- [1] DALEY R. Atmospheric Data Analysis[M]. Cambridge University Press, New York, USA, 1991: 457.
- [2] EVENSEN G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics[J]. Journal of Geophysical Research, 1994, 99(C5): 10 143-10 162.
- [3] EVENSEN G. Using the extended Kalman filter with a multiplayer quasi-geostrophic ocean model[J]. Journal of Geophysics Research, 1992, 97(17): 905-924.
- [4] Mclaughlin D. Recent development in hydrologic data assimilation[J]. Reviews of Geophysics, 1995: 977-984.
- [5] REICHLE R H, MCLAUGHLIN D B, ENTEKHABI D. Hydrologic data assimilation with the ensemble Kalman filter[J]. Mon Wea Rev, 2002, 130(1): 103–114.
- [6] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Trans. ASME, Series D, J. Basic Eng. 1960, 82: 35-45.
- [7] 黄春林,李新.土壤水分同化系统的敏感性试验研究[J].水科学进展,2006,17(4):457-465.

- [8] 刘成思, 薛纪善. 关于集合 Kalman 滤波的理论和方法的发展[J]. 热带气象学报, 2005, 21(6): 628-633.
- [9] 万齐林,薛纪善,陈子通,等. 雷达 TREC 风的三维变分同化应用与试验[J]. 热带气象学报, 2005, 21(5):449-457.
- [10] 庄照荣,薛纪善. 云迹风资料的三维变分同化及对台风预报的影响试验[J]. 热带气象学报,2004,20(3):225-236.
- [11] JULIER S J, UHLMANN J K. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear System[C]. In The 11<sup>th</sup> Int. Sym. on AeroSense/Defence Sensing, Simulation and Controls, Orlando, Florida, USA, 1997.
- [12] JULIE S J. The scaled unscented transformation[C]. American Control Conference. Anchorage Alaska: IEEE, 2002, 6: 4 555-4 559.
- [13] JULIER S J, UHLMANN J, DURRANT-WHYTE H F. A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators)[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2000, 45: 477-482.
- [14] WAN E A, VAN DER MERWE R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation)[C]//In Proc of the Symposium 2000 on Adaptive System for Signal Processing, Communication and Control (AS-SPCC). Lake Louise, Alberta, Canada, October 2000, IEEE.
- [15] 蔡洪. Unscented Kalman 滤波用于再入飞行器跟踪[J]. 飞行器测控学报, 2003, 22(3): 12-16.
- [16] 刘元,谢京稳,刘利生,等. Unscented Kalman 滤波在空间飞行器被动测距中的应用[J]. 飞行器测控学报, 2005, 24(2):50-55.
- [17] LORENZ E N. Deterministic Nonperiodic Flow[J]. J Atmos Sci, 1963(20): 130-141.

## APPLICATION OF UNSCENTED KALMAN FILTER FOR DATA ASSIMILATION

HUANG Chun-lin, LI Xin

(Cold and Arid Regions Environmental and Engineering Research Institute, CAS, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Unscented Kalman Filter (UKF) is a new data assimilation algorithm, which does not need adjoint matrix and can resolve the problem of nonlinearity existing in models. In this paper, the UKF algorithm is described in detail. The Lorenz model is used in numerical experiments to examine the performance of UKF. The results show that the data assimilation scheme based on UKF is independent of the first guess of background field. This method can also restrain the increase of state error and the assimilation results are satisfying.

Key words: Unscented Kalman filter; data assimilation; Lorenz model