

文章编号: 1004-4965 (2007) 06-0669-04

## 区域旱涝气候混沌动力学可预报性研究

栗珂<sup>1</sup>, 郑小华<sup>1</sup>, 屈振江<sup>2</sup>

(1. 陕西省气象科学研究所, 陕西 西安 710015; 2. 陕西省气象局, 陕西 西安 710015)

**摘 要:** 根据西安地区旱涝气候等级近 1 624 a (380~2003 年) 资料序列, 运用非线性系统混沌动力学理论, 通过计算气候吸引子的关联维数、Kolmogorov 熵和 Lyapunov 指数, 对西安区域旱涝气候的混沌特性和可预报性进行研究。结果表明: 西安区域旱涝气候系统是一个具有有限个自由度的复杂的混沌系统。其吸引子关联维数约为 3.1, 确定性的平均可预报时间尺度约为 14.8 a, 最大可预报时间尺度约为 20.7 a。

**关 键 词:** 旱涝气候; 混沌; 可预报性

中图分类号: P426.616 文献标识码: A

### 1 引 言

1980 年代以来, 随着非线性动力系统理论的发展, 使得深入地研究和讨论气候系统可预报性问题的条件日趋成熟。利用气候变量时间序列研究气候系统的混沌特征及可预报性已取得了许多成果。Nicolis 等<sup>[1]</sup> (1984)、Fraedrich 等<sup>[2]</sup> (1987), 根据非线性动力学理论, 利用相空间重建气候动力系统, 计算了气候系统的关联维数; 杨培才等<sup>[3]</sup> (1990) 研究了 ENSO 的可预报性; 严华生等<sup>[4]</sup> (2003), 对月降水量的可预报性时空分布作了研究。这些研究成果标志着天气气候系统的混沌特性及可预报性问题已提到大气科学的日程上来。

本文基于上述研究工作的理论分析方法, 根据西安地区近 1 624 a (380~2003 年) 旱涝等级气候资料, 通过分析其动力学行为, 旨在对区域旱涝气候系统的混沌特征及可预报性问题进行初步探讨。

### 2 资料来源

西安地区旱涝等级气候资料, 取自《中国近五百年旱涝分布图集》<sup>[5]</sup> (1981) 所附资料。1932 年以前是根据历史气候记载进行科学分析, 用分类定级的办法将史料记载转化为定量的旱涝等级资料; 1932 年以后用 5~9 月实测降水量按表 1 标准分级。其中,  $R$ 、 $\bar{R}$  和  $\sigma$  分别为 5~9 月的降水量、历年 5~9 月平

均降水量和 5~9 月降水量标准差。

表 1 旱涝气候等级分级标准

旱涝等级	气候特征	旱涝标准
1	大涝	$R > (\bar{R} + 1.17\sigma)$
2	涝	$(\bar{R} + 0.33\sigma) < R \leq (\bar{R} + 1.17\sigma)$
3	正常	$(\bar{R} - 0.33\sigma) < R \leq (\bar{R} + 0.33\sigma)$
4	旱	$(\bar{R} + 1.17\sigma) < R \leq (\bar{R} - 0.33\sigma)$
5	大旱	$R \leq (\bar{R} - 1.17\sigma)$

### 3 混沌特征量的计算

#### 3.1 关联维数

目前, 学术界普遍认为诊断一个动力系统是否是混沌运动, 关联维数 (Correlation Dimension) 是首要的混沌特征量, 它是系统复杂性的一个定量标志。在实际问题中, 我们面对的经常是一维气候变量时间序列构成的系统, 即

$$x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N) \quad (1)$$

Packara 等<sup>[6]</sup> (1980) 提出对一维气候变量时间序列式 (1) 通过引入时间滞后  $\tau$ , 重建  $m$  维的相空间  $R^m$ , 在这个空间中恢复原来的动力系统, 即

$$X_m(t_i) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x[t_i + (m-1)\tau]\} \quad (2)$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau / \Delta t)$

其中,  $m$  为嵌入相空间的维数,  $N$  为序列样本容量,  $\Delta t$  为观测的时间间隔。通过式 (2) 把气候吸引子嵌入由气候变量时间序列 (1) 和时间滞后  $\tau$  所张成的相空间里。

Grassberg 等<sup>[7]</sup>(1983)给出了用单变量时间序列估计吸引子维数的方法,首先建立系统(2),然后考察  $m$  维( $m$  足够大)相空间里任意一对相点

$$X_m(t_i) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x[t_i + (m-1)\tau]\}$$

$$X_m(t_j) = \{x(t_j), x(t_j + \tau), \dots, x[t_j + (m-1)\tau]\}$$

它们之间的距离(欧氏模) $r_{ij}(m)$ 为

$$r_{ij}(m) = |X_m(t_i) - X_m(t_j)| \quad (3)$$

给定距离门限  $r$  ( $r$  为一小的正数),求取有多少对相点( $X_i, X_j$ )之间的距离小于  $r$ ,并把距离小于  $r$  的“点对”在所有“点对”中所占的比例,即关联函数记为

$$C_2(r, m) = \frac{1}{N_s^2} \sum_{i,j=1}^{N_s} \theta(r - |X_i - X_j|) \quad (i \neq j) \quad (4)$$

其中  $r - |X_i - X_j| = Z, \theta(Z)$  为 Heavisid 函数,且

$$\begin{cases} \theta(Z) = 0 & Z < 0 \\ \theta(Z) = 1 & Z > 0 \end{cases}$$

$N_s = n - (m-1)\tau / \Delta t$  为总相点数,表示相轨道的长度。 $C_2(r, m)$  是一累积分布函数,它描写了相空间中吸引子上两点间距离小于  $r$  的概率,它刻画了相对于相空间某参考点在  $r$  内的相点聚集程度。为了合理反映系统的内部性质,一般取适当的  $r$  使得  $0 \leq C_2(r, m) \leq 1$  才有意义。根据  $C_2(r, m)$  与  $r$  的关系:  $C_2(r, m) = r^{D_2(m)}$ , 得到关联维数  $D_2(m)$

$$D_2(m) = \left| \frac{\ln C_2(r, m)}{\ln r} \right| \quad (5)$$

式中  $m$  为嵌入相空间的维数。

对西安区域旱涝等级时间序列,用上述计算方法计算了关联维数  $D_2$ 。计算中  $N=1624$ ,其它参数取值范围参考其它文献,取滞后时间  $\tau=5$ ,嵌入维数  $m=2 \sim 18$ ,门限距离  $r=0.3 \sim 7.9$ ,门限距离步长  $\Delta r=0.4$ 。图 1 是西安区域旱涝气候的关联函数  $C_2(r, m)$  的双对数  $\ln C_2(r, m) - \ln r$  图,图中曲线的中间部分有相当范围是直线,称为标度区,直线部分的斜率即为求得的关联维数。当  $m$  较小时,曲线之间间隔较大,曲线中部标度区斜率较小;随着  $m$  的增大,曲线间隔变小,标度区直线斜率逐渐增大,当  $m > 15$  后,直线密集,相互间近于平行,斜率趋于收敛。此时用式(5)算得的  $D_2(m)$  可以认为它基本上代表了旱涝气候系统的饱和关联维数  $D_2$ ,  $D_2(m)$  可达到饱和,可以认为所考查的旱涝气候系统为一混沌系统。

图 2 是取门限距离  $\tau=5, r=3.9$  时,关联维数  $D_2$  随嵌入维数  $m$  的变化关系。随着  $m$  的增大,曲线越来越明显地偏离直线  $m=D_2$ 。当嵌入维数  $m \geq 15$  时,

曲线趋于与  $m$  轴平行,继续增大  $m$ ,  $D_2$  不再变化,收敛于 3.1,可以认为它就是西安地区旱涝气候系统的关联维数。 $D_2$  可达到饱和,且为一分数维,有理由认为所考查的旱涝气候系统存在奇怪吸引子,为一混沌系统。描述该系统所需要的独立变量至少要  $\Phi = INT(D_2 + 1) = 4$  个,该系统的饱和嵌入维数为 15。

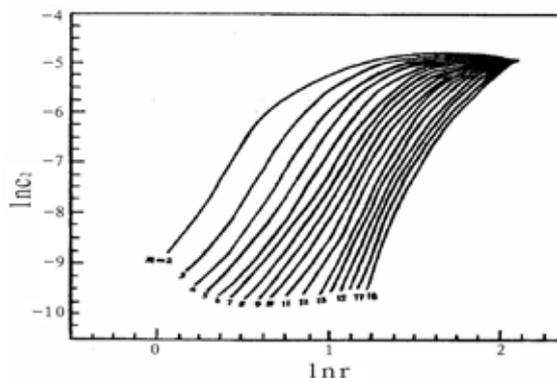


图 1 不同嵌入维数  $m$ ,  $\ln C_2(r, m)$  随  $\ln r$  的分布

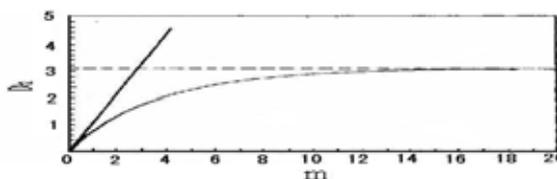


图 2 关联维数  $D_2$  随嵌入维数  $m$  的变化

### 3.2 Kolmogorov 熵

Kolmogorov 熵是研究系统动力行为混沌特性重要特征量之一。Grassberg 等给出了利用单变量时间序列估计 Kolmogorov 熵的方法。研究表明,二阶 Renyi 熵,即  $K_2$  熵,它是 Kolmogorov 熵的一个下界,是 Kolmogorov 熵的一个较好的估计值,且计算方便。因而在确定系统混沌性质和计算平均可预报时间尺度时,常用  $K_2$  熵代替 Kolmogorov 熵。

在计算  $K_2$  熵时,先用时间序列(1)重建相空间,对于足够大的嵌入维数  $m$ ,当  $N_s \rightarrow \infty, r \rightarrow 0$  时,由标度率  $C_2(r, m) \propto r^{D_2} \exp(-m\tau K_2)$  可得

$$K_2(r) = \frac{1}{P\tau} \ln \frac{C_m(r)}{C_{m+p}(r)} \quad (6)$$

式中  $P=1, 2, \dots, n$ ,  $\tau$  为滞后时间。固定门限距离  $r$ ,增加  $m$  值,直到出现  $K_2(p=i+1) \approx K_2(p=i)$ ,即  $K_2(r)$  收敛于  $K_2(p=i)$  就是系统的  $K_2$  熵。

用上述方法对西安区域旱涝气候系统的  $K_2$  熵做了计算。取  $\tau=5, r=3.9$  年,当  $m$  增大到 15 以后,  $K_2(r)$  趋于有限正数,  $K_2 \approx 0.0674$ 。它应当是 Kolmogorov

熵较好的估计值。此值为一正小数，这就从不同的角度表征了旱涝气候系统具有明显的混沌特性。

### 3.3 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是吸引子对初始条件敏感性的量度，是判别系统行为是否为混沌的最好指数之一。Wolf 等<sup>[8]</sup> (1988) 提出从单变量时间序列提取最大 Lyapunov 指数 ( $LE_1$ ) 的方法。在重建相空间式 (2) 中，随着嵌入维数的增加，计算吸引子两个非常接近的相点  $X_m(t_i)$  和  $X_m(t_j)$  构成的向量长度在时间  $T_i$  内的平均伸缩率

$$LE_1^{(i)} = \frac{1}{T_i} \log_2(L_{i+1}/L_i) \quad (7)$$

式中  $L_i$  和  $L_{i+1}$  表示对应相点间的欧氏距离

$$L_i = |X_m(t_i) - X_m(t_j)|$$

$$L_{i+1} = |X_m(t_i + T_i) - X_m(t_j + T_j)|$$

这里  $t_i$  和  $t_j$  必须具有适当的间隔，要求  $|t_j - t_i| > \tau$ ，否则会引起  $LE_1$  估计值过高偏离。当以上过程从起始时刻  $t_0$  进行到终止时刻  $t_N$  时，设共进行  $q$  个过程，它们的平均伸缩即最大 Lyapunov 指数估计值

$$LE_1 = \frac{1}{q} \sum \frac{1}{T_i} \log_2(L_{i+1}/L_i) \quad (8)$$

用式 (8) 计算西安区域旱涝气候等级时间序列的最大 Lyapunov 指数随  $m$  的变化。 $LE_1$  随着嵌入相空间的维数  $m$  的增加而逐渐减小，且趋于有限正数，当  $m$  大于 15 时， $LE_1 = 0.0483$ 。 $LE_1 > 0$ ，为一小数，表明旱涝气候系统具有混沌特性。

## 4 可预报时间尺度的计算

### 4.1 可预报性的量度

通过旱涝气候系统混沌特征量的计算，可以认为旱涝气候系统存在着混沌行为，即系统内存在着随机性。它对初始条件极为敏感，所以，旱涝气候系统在非混沌区必然存在着一个可预报时限。

动力系统的可预报性通常是用初始误差的增长来度量的。如果误差与时俱增，则认为系统的长期行为是不可预报的；相反，如果误差随时间变化有所增加，但未被放大一倍，此时间段则认为是可预报的，随后当误差被放大到一倍以上，此时间段则认为是不可预报的。设考查的动力系统形式为

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

系统误差  $\delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  随时间的变化由线性微分方程组

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

来决定，其中， $A_{ij}$  是式 (9) 中函数  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的 Jacobi 矩阵元素

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|_{x_i=(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n)$$

从式 (10) 可以看出， $A_{ij}$  的特征值给出了误差  $\delta x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  在给定时刻相空间的指数增长率，也就是 Lyapunov 指数。 $LE_1$  的倒数被定义为系统的最大可预报时间尺度

$$\hat{T}_L = 1/LE_1 \quad (11)$$

由于  $K_2$  熵与 Lyapunov 指数有着密切关系，在吸引子覆盖较为均匀时，它是正的 Lyapunov 指数之和。它表示吸引子紧邻 (距离小于  $r$ ) 的轨道段的平均发散率，相当于度量了 Lyapunov 特征指数。平均发散率的倒数表示系统误差增长一倍所需要的时间，这个时间给出了在吸引子上动力系统的一个平均可预报时间尺度

$$\hat{T}_M = \frac{1}{K_2} = P\tau [\ln \frac{C_m(r)}{C_{m+p}(r)}]^{-1} \quad (12)$$

### 4.2 平均可预报时间尺度

在用西安地区旱涝等级气候资料构造的相空间  $R^m$  中，取  $\epsilon = 5$ ， $r = 3.9$ ， $m = 2 \sim 8$ ，用式 (6) 和 (12) 算得的  $K_2$  及  $\hat{T}_M$  列于表 2。从表 2 看出，当嵌入维数  $m > 15$  时， $K_2$  就趋于一稳定值，即  $K_2 = 0.0674$ ，此时  $\hat{T}_M = 14.84$ ，可以认为西安区域旱涝气候系统的平均可预报时间尺度约为 14.8 a。由于  $K_2$  熵给出的系统误差是一个过严的估计，所以，可预报时间尺度可能是一个保守的估计。

### 4.3 最大可预报时间尺度

用式 (8) 和 (11) 对西安区域旱涝气候系统的  $LE_1$  和  $\hat{T}_L$  进行计算。当嵌入维数  $m > 15$  时， $LE_1$  趋于一稳定值，即  $LE_1 = 0.0483$ ，此时  $\hat{T}_L = 20.72$ ，可以认为西安区域旱涝气候系统的最大可预报时间尺度约为 20.7 a。由于  $LE_1$  是 Kolmogorov 熵的一个下限，所以， $LE_1$  给出的可预报时间尺度比  $K_2$  估计得要乐观一些。

表 2 西安区域旱涝气候系统平均可预报时间尺度

嵌入维数/m	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$K_2/bit/a$	0.020 3	0.035 2	0.047 5	0.055 0	0.060 2	0.063 8	0.065 0	0.067 4	0.067 5
$\hat{\tau}_M/a$	49.26	28.41	21.05	18.18	16.61	15.67	15.38	14.84	14.81

#### 4.4 不同区域可预报时间尺度的比较

表 3 是不同区域旱涝气候系统平均可预报时间尺度的比较与文献[9]对我国北方部分地区旱涝气候系统平均可预报时间尺度计算结果的比较情况。可以看出,西安区域旱涝气候系统的平均可预报时间尺度比北京、天津、济南、合肥地区略大一些,与太原地区接近,这可能与各区域的自然环境和降水变率有关,这些问题有待进一步研究。

表 3 不同区域旱涝气候系统平均可预报时间尺度比较

区域	北京	天津	太原	西安	济南	合肥
$\hat{\tau}_M/a$	11.6	11.2	14.2	14.8	11.4	13.2

## 5 结 论

(1) 通过对西安区域旱涝气候系统混沌特征量的计算,得到系统的关联维数  $D_2$  为一分数,  $K_2$  熵和

$LE_1$  是一有限正数,表明该系统为一具有有限个自由度的确定性的混沌动力系统。这些特征量表征了该系统的混沌特性。

(2) 旱涝气候系统吸引子的维数  $D_2$  的计算结果趋近于 3.1,表明模拟该系统需要的最少独立变量的个数为 4 个。还表明有可能用分形理论来研究旱涝气候系统的特性。

(3) 西安区域旱涝气候系统的混沌动力学可预报性研究,初步结果表明,由  $K_2$  熵估计的平均可预报时间尺度约为 14.8 a;由最大 Lyapunov 指数  $LE_1$  估计的最大可预报时间尺度约为 20.7 a,这可能是一个比较保守的估计。

### 参 考 文 献:

- [1] NICOLIS C, NICOLIS G. Is there a climatic attractor?[J]. Nature, 1984, 311: 529-532.
- [2] FRAEDRICH K. Estimating weather and climate predictability on attractors[J]. J Atmos Sci, 1987, 44(4): 722-728.
- [3] 杨培才, 陈烈庭. 埃尔尼诺/南方涛动的可预报性[J]. 大气科学, 1990, 33(2): 144-153.
- [4] 严华生, 严小冬, 王会军. 用 500 hPa 月高度场月降水预报所提供的可预报性时空分布[J]. 热带气象学报, 2003, 19(4): 389-396.
- [5] 中央气象局气象科学研究所. 中国近 500 年旱涝分布图集[M]. 北京: 地图出版社, 1981: 46-58.
- [6] PACKARD N H. Geometry from a time series, phys[J]. Rev Lett, 1980, 45: 712-716.
- [7] GRASSBERGER P, PROCACCIA J. Measuring the strangeness of strange attractors[J]. Physica, 1983, 9D: 189-208.
- [8] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica, 1985, 16D: 285-317.
- [9] 肖天贵, 林清平, 刘开宇. 两河流域中下游地区旱涝系统的维数分析[J]. 成都气象学院学报, 1995 (2): 149-155.

## RESEARCH INTO PREDICTABILITY OF CLIMATOLOGICAL SYSTEM WITH NONLINEAR DYNAMICS

LI Ke<sup>1</sup>, ZHENG Xiao-hua<sup>1</sup>, QU Zhen-jiang<sup>2</sup>

(1. Meteorological Institute of Shaanxi Province, Xi'an 710015, China;

2. Meteorological Observatory of Shaanxi, Xi'an 710015, China)

**Abstract** :Based on the theory of chaotic dynamics for nonlinear systems, and according to the yearly drought and flood level data within 1624 a (from 380 ~ 2003) in Xi'an area, a study on the chaotic characteristics and the predictability of the climatological system were investigated by calculating the associated dimension, Kolmogorov entropy and Lyapunov index of climatological attractor. The results showed that the climatological system of drought and flood in Xi'an was a complex chaotic one with limited degrees of freedom. The correlation dimension for its average attractor was 3.1, the deterministic average predictable time scale was about 14.8 a, and the maximum predictable time scale was about 20.7 a.

**Key words**: climatological system, chaotic characteristic, predictability