

二度重磁异常振幅谱的手算方法

安徽冶金地质勘探公司808队 王宗器

通过富立叶变换在频率域上研究异常,给物探重磁数据处理工作增加了新的手段。诸如,利用异常的振幅谱和对数振幅谱估算地质体的埋深,根据频谱曲线确定干扰体的频率范围,设计适宜的滤波算子,通过滤波运算压制干扰、突出有用异常等等。目前获得异常频谱的通用方法是以电子计算机对异常进行数值富立叶变换。在电算尚未充分普及的情况下,为了适应野外物探工作,本文根据积分变换近似计算方法的原理,提出一种二度重磁异常振幅谱的简易手算方法。

方法原理

按照频谱分析理论,函数 $g(x)$ 的频谱是它的富立叶变换 $G(\omega)$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1)$$

式中 $e^{-i\omega x}$ 是变换的核, $G(\omega)$ 是 $g(x)$ 的复谱, $|G(\omega)|$ 为振幅谱。

如果 $g(x)$ 是偶函数,则它的富立叶变换可以写成

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos \omega x dx = 2 \int_0^{\infty} g(x) \cos \omega x dx = 2G_c(\omega) \quad (2)$$

上式最后的积分称为富氏余弦变换,记为 $G_c(\omega)$ 。如果 $g(x)$ 是奇函数,其富立叶变换可写成:

$$G(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin \omega x dx = -2i \int_0^{\infty} g(x) \sin \omega x dx = -2iG_s(\omega) \quad (3)$$

上式最后的积分称为富氏正弦变换,记为 $G_s(\omega)$ 。

下面以富氏余弦变换

$$G_c(\omega) = \int_0^{\infty} g(x) \cos \omega x dx \quad (4)$$

为例,推导这种积分变换的近似计算公式。对(4)式进行分部积分得

$$G_c(\omega) = \left[\frac{1}{\omega} g(x) \sin \omega x \right]_{x=0}^{x=\infty} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{dg}{dx} \sin \omega x dx \quad (5)$$

注意到上式右边第一项含有因子 $\sin \omega x$,当取 $x=0$ 时,其值为零。此外,假设函数 $g(x)$ 在无穷远处的值为零(重磁异常一般都属于这种情况),这样一来,上式右边第一项的值为零。于是有

$$G_c(\omega) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{dg}{dx} \sin \omega x dx \quad (6)$$

继续利用分部积分, 并注意到 $\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\infty} = 0$,

$$\begin{aligned} G_c(\omega) &= -\frac{1}{\omega} \left\{ \left[-\frac{1}{\omega} \frac{dg}{dx} \cos \omega x \right]_{x=0}^{x=\infty} - \left(-\frac{1}{\omega} \right) \int_0^{\infty} \frac{d^2g}{dx^2} \cos \omega x dx \right\} \\ &= -\frac{1}{\omega^2} \left(\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0} + \int_0^{\infty} \frac{d^2g}{dx^2} \cos \omega x dx \right) \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式提供了积分近似计算方法的基础。方法如下: 作函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \infty)$ 上的图象, 分积分区间 $(0, \infty)$ 为 $n+1$ 份, 将 $g(x)$ 的图形用 $n+1$ 段直线构成的折线逼近 (折线的顶点也可以不在 $g(x)$ 的图形上), 并使第 $n+1$ 段直线取作水平的。然后, 以第 j 段直线的斜率代替与之相应的一段函数图形的平均斜率。记第 j 段直线的斜率为 k_j , 它的增量为 Δk_j , 即 $\Delta k_j = k_{j+1} - k_j$ 。又记第 j 段和第 $j+1$ 段直线交叉点的横坐标为 x_j 。以 k_j 代替 (7) 式中的

$\frac{dg}{dx}$, Δk_j 代替 $\frac{d^2g}{dx^2}$, 则 (7) 式的积分便可化为和式:

$$G_c(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} \left(k_0 + \sum_{j=0}^{n+1} \Delta k_j \cos \omega x_j \right) \quad (8)$$

当 $g(x)$ 是偶函数, 且 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可微时, 必有:

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0} = 0, \text{ 即 } k_0 = 0, \text{ 从而 } \Delta k_0 = k_1.$$

此外, 由于第 $n+1$ 段直线取作水平, 故 $k_{n+1} = 0$, 它的增量同样为零, 即 $\Delta k_{n+1} = 0$, 于是:

$$G_c(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} \left(k_1 + \sum_{j=1}^n \Delta k_j \cos \omega x_j \right) \quad (9)$$

容易看出, 由 (9) 式不能给出 $G_c(0)$ 的值。因为当 $\omega = 0$ 时, 此式成为不定形 $\frac{0}{0}$ 。这时, 可按下述途径另外求得 $G_c(0)$ 的近似表达式。在 (4) 式中令 $\omega = 0$, 得

$$G_c(0) = \int_0^{\infty} g(x) dx \quad (10)$$

连续进行分部积分, 同样注意到函数 $g(x)$ 在无穷远处有界, 即 $g(x)|_{x=\infty} = 0$, $\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=\infty} = 0$,

便得到

$$G_c(0) = \left[g(x)x \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{dg}{dx} x dx$$

$$= \left[g(x)x \right]_{x=0}^{x=\infty} - \left[\frac{1}{2} \frac{dg}{dx} x^2 \right]_{x=0}^{x=\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d^2g}{dx^2} x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d^2g}{dx^2} x^2 dx \quad (11)$$

同前面一样，应用折线逼近的方法，分积分区间为 $n+1$ 段，在第 j 段上，以函数 $g(x)$ 的平均斜率（它等于相应的第 j 段直线的斜率）的增量来近似地代替式 $g(x)$ 的二阶导数， x_j 则取作各直线间交点的横坐标，这样便得：

$$G_c(0) \approx -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j x_j^2 \quad (12)$$

(9)式和(12)式即为计算函数 $g(x)$ 的富氏余弦变换的近似公式。仿此方法可以得到富氏余弦逆变换、富氏正弦变换、富氏正弦逆变换的近似计算公式，列如表1。式中各符号的意义同前文所述。

表1

变换名称	变换的准确式	变换的近似式
余弦变换	$G_c(\omega) = \int_0^{\infty} g(x) \cos \omega x dx$	$G_c(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} (k_1 + \sum_{j=1}^n \Delta k_j \cos \omega x_j)$ $G_c(0) \approx -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j x_j^2$
余弦逆变换	$g_c(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega x d\omega$	$g_c(x) \approx -\frac{1}{\pi x^2} (k_1 + \sum_{j=1}^n \Delta k_j \cos \omega x_j)$ $g_c(0) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \omega_j^2$
正弦变换	$G_s(\omega) = \int_0^{\infty} g(x) \sin \omega x dx$	$G_s(\omega) \approx \frac{g(0)}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \sin \omega x_j$
正弦逆变换	$g_s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\omega) \sin \omega x d\omega$	$g_s(x) \approx -\frac{1}{\pi x^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \sin \omega x_j$

在物探工作中，一些形状规则二度体的重磁异常是以偶函数或奇函数的形式出现的，前者的图形以原点对称，后者则以原点反对称。这些异常的振幅谱 $|G(\omega)|$ 可以用折线逼近的方法直接代入余弦变换或正弦变换的近似公式，算出 $G_c(\omega)$ 或者 $G_s(\omega)$ ，然后再按

$$|G(\omega)| = |2G_c(\omega)| \quad \text{或} \quad |G(\omega)| = |-2iG_s(\omega)|$$

求得。对于异常曲线在原点两侧不对称(非偶非奇)的情况，问题比较复杂。这时要由(1)式按前述相同的步骤，利用分部积分和折线逼近的方法求得复谱 $G(\omega)$ 的近似公式

$$G(\omega) \approx -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j e^{-i\omega x_j}$$

$$G(0) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j x_j^2 \quad (13)$$

它的振幅谱的近似公式是

$$\begin{aligned} |G(\omega)| &= \left| -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j e^{-i\omega x_j} \right| = \left| -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \cos \omega x_j + \frac{i}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \sin \omega x_j \right| \\ &= \left[\left(-\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \cos \omega x_j \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \Delta k_j \sin \omega x_j \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14) \end{aligned}$$

值得注意的是, 利用(14)式求不对称异常的振幅谱时, 必须对异常的图形在区间 $(-\infty, \infty)$ 上作折线逼近, 计算工作量较大。因此, 下面提出的方法是值得重视的, 即在求异常振幅谱之前, 先将函数(异常)分解为半和或半差曲线, 或利用其他曲线转换方法(例如磁化方向转换)获得近于对称的异常曲线, 然后按偶函数(或奇函数)求振幅谱的方法, 用折线逼近法直接代入余弦变换(或正弦变换)的近似公式算得异常的振幅谱。下面通过实例介绍手算振幅谱的具体方法。

具体方法和计算实例

例1 计算走向无限垂直磁化水平圆柱体磁场的振幅谱。磁场公式是

$$Z(x) = 2M(h^2 - x^2)(h^2 + x^2)^{-2} \quad (15)$$

这是一个偶函数, 它的振幅谱可按

$$|Z(\omega)| = |2Z_c(\omega)| \quad (16)$$

求得。式中 $Z_c(\omega)$ 是 $Z(x)$ 的富氏余弦变换。如图1所示, 在区间 $(0, \infty)$ 上作函数 $Z(x)$ 的图象(为简便计, 取 h 等于1个长度单位, $2M$ 等于1个磁荷面密度单位)。在(9)式中令 $n=5$, 即分积分区间 $(0, \infty)$ 为6份, 以6段直线构成的折线逼近 $Z(x)$ 的图象, 使第6段直线取作水平的。记第 j 段直线的斜率为 k_j , 第 j 段与第 $j+1$ 段直线交点的横坐标为 x_j , 由图1量得 k_j 、 x_j 及由此算得 Δk_j 的值见表2。将这些值代入(9)式得

$$\begin{aligned} Z_c(\omega) &= -\frac{1}{\omega^2} (-0.268 - 1.332 \cos 0.2\omega + 0.999 \cos 0.6\omega + \\ &\quad + 0.478 \cos 1.17\omega + 0.167 \cos 1.55\omega - 0.044 \cos 5.30\omega) \quad (17) \end{aligned}$$

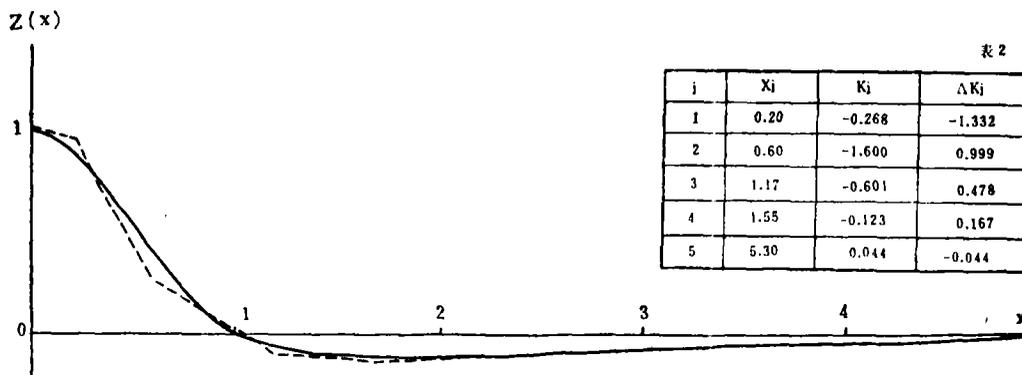


图1 垂直磁化水平圆柱体磁场 $Z(x)$ 及其折线逼近图

给定 ω 的值, 便可由(17)式算出 $Z_c(\omega)$ 的值, 然后按(16)式算得振幅谱 $|Z(\omega)|$ 。为了便于比较, 我们将近似值与(15)式的余弦变换的准确值*

$$|Z(\omega)| = 2\pi M \omega e^{-\omega h} \quad (18)$$

列于表 3, 并绘出两种值的振幅谱曲线, 见图 2 (注意 $\omega = 0$ 时的近似值应由(12)式算出)。由图 2 表 3 可见近似程度是比较满意的。

例 2 手算无限延深垂直磁化直立薄板磁场的振幅谱。磁场公式是

$$Z(x) = 2mh(x^2 + h^2)^{-1} \quad (19)$$

这也是一个偶函数, 其图形的右半部份见图 3。它的振幅谱可以通过折线逼近方法直接代入余弦变换近似公式求得。由图 3 量得的 k_j 、 x_j 值以及由此算得的 Δk_j 值见表 4, 将这些值代入(9)式得本例的近似公式是(本例 $n = 4$):

$$Z_c(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}(-0.2217 - 0.4785\cos 0.3\omega + 0.3945\cos 1.0\omega - 0.2358\cos 2.0\omega + 0.0699\cos 5.1\omega) \quad (20)$$

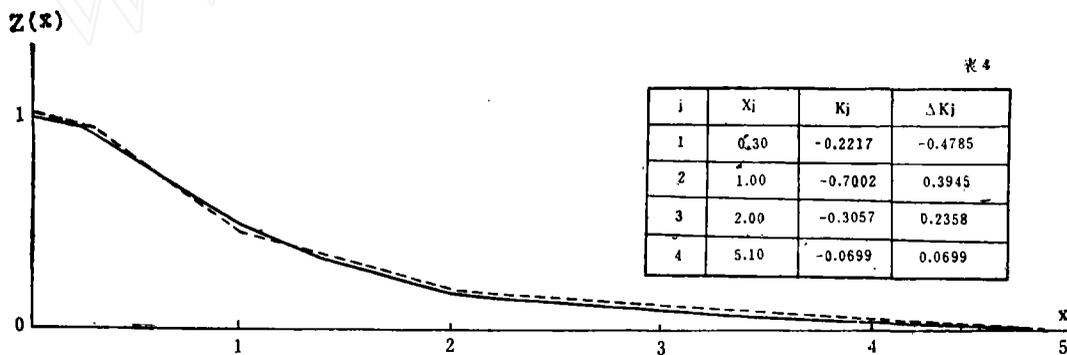


图 3 无限延深垂直磁化直立薄板异常 $Z(x)$ 及其折线逼近图

给定 ω 的值, 便可由(20)式算出 $Z_c(\omega)$, 然后按(16)式算得本例振幅谱 $|Z(\omega)|$ 。 $\omega = 0$ 处的值则由(12)式算出, 它是 $|Z(0)| = 3.15$ 。用围道积分法同样可以算出(19)式余弦变换的准确式是

$$|Z(\omega)| = 2\pi m e^{-\omega h} \quad (21)$$

图 4 和表 5 示出了本例振幅谱的准确值和近似值。明显地看出近似程度较佳。

例 3 图 5 是宁芜南段某地 M_{10} 号 ΔZ 磁异常实测剖面图, 手算它的振幅谱。如图 5 所示, 由于异常极大值两侧曲线不对称, 因而需先求出它的半和曲线(见图 5)。取半和曲线极大值作为座标原点, 然后在区间 $(0, \infty)$ 上施用折线逼近法(图 6), 由图 6 量得 x_j 、 k_j 的值及由此算得的 Δk_j 值列于表 6, 将这些值代入(9)式作余弦变换, 得本例的近似公式是

* 用围道积分方法可以求得(15)式余弦变换的准确式(18)式, 本文不讨论。

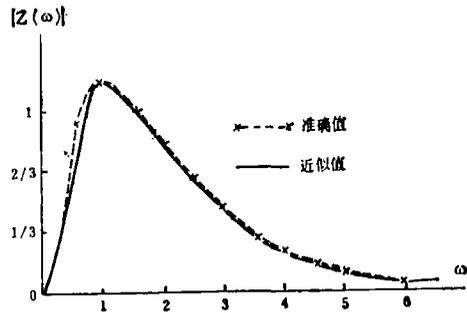


图 2 例 1 的振幅谱

表 3

ω	准确值	近似值	ω	准确值	近似值
0	0	0	3	0.47	0.45
0.5	0.95	0.75	3.5	0.33	0.33
1.0	1.16	1.16	4	0.23	0.22
1.5	1.05	1.03	4.5	0.16	0.16
2.0	0.85	0.82	5	0.11	0.12
2.5	0.65	0.64	6	0.07	0.08

表 4

j	X_j	K_j	ΔK_j
1	0.30	-0.2217	-0.4785
2	1.00	-0.7002	0.3945
3	2.00	-0.3057	0.2358
4	5.10	-0.0699	0.0699

$$\Delta Z_c(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} (-0.1763 - 1.0587 \cos 0.33\omega + 0.7033 \cos 1.63\omega + 0.4967 \cos 3.07\omega - 0.035 \cos 6\omega) \quad (22)$$

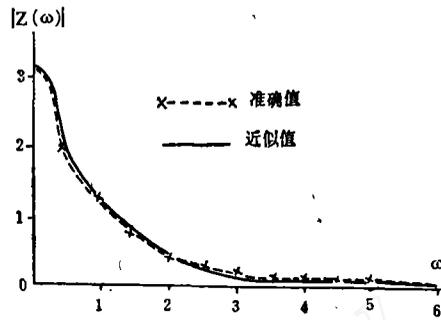


图4 例2的振幅谱

表5

ω	准确值	近似值	ω	准确值	近似值
0	3.14	3.15	3.0	0.16	0.16
0.5	1.91	2.00	3.5	0.10	0.10
1.0	1.16	1.10	4.0	0.06	0.07
1.5	0.71	0.75	4.5	0.04	0.05
2.0	0.43	0.45	5.0	0.02	0.02
2.5	0.26	0.24	6.0	0.01	0.01

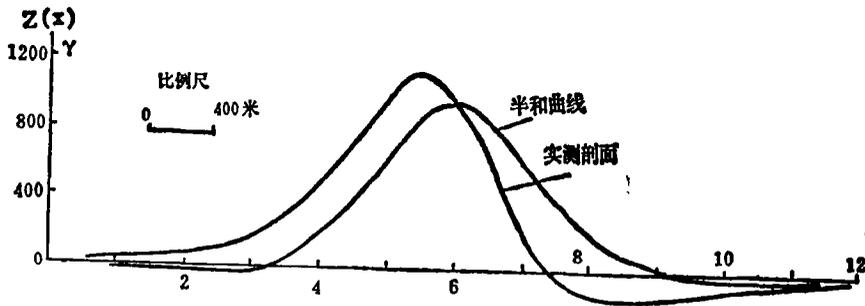


图5 $M_{10}\Delta Z$ 磁异常实测剖面及半和曲线图

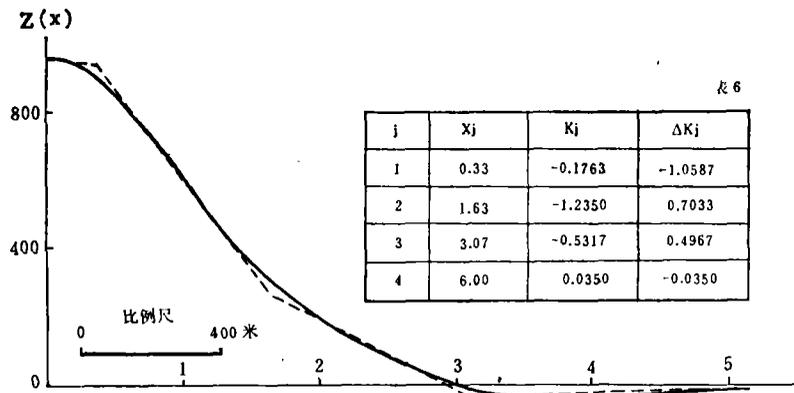


图 6 $M_{10}\Delta Z$ 磁异常半和曲线及其折线逼近图

然后按 $|\Delta Z(\omega)| = |2\Delta Z_c(\omega)|$ 算得本例 ΔZ 磁异常的振幅谱如图 7 [注意 $\Delta Z_c(0)$ 的值同样应由 (12) 式算出]。图 8 绘出了本例振幅谱对数值的图象。按用异常振幅谱确定地质体埋深的方法**，由图 8 可以求得引起 M_{10} 磁异常的磁性体大致可分为二层，第一层埋深为 340 米，第二层埋深为 510 米，这与验证结果大致相符***。

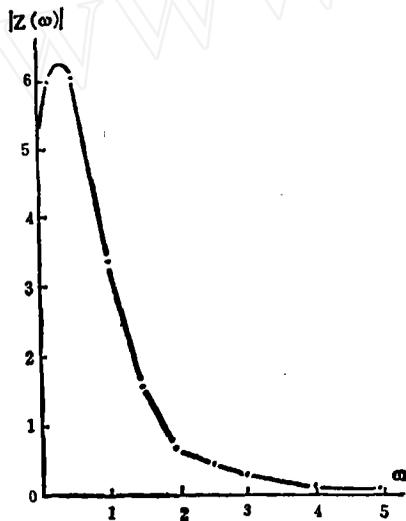


图 7 M_{10} 磁异常振幅谱

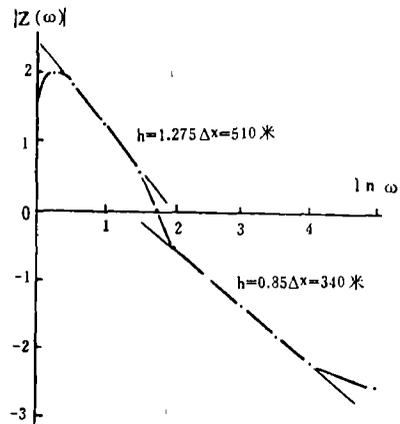


图 8 M_{10} 磁异常对数振幅谱

例 4 图 9 是宁芜南段某地 $M_{4,2} \Delta Z$ 磁异常 II 号剖面图(曲线已经区域场改正和圆滑)，及其手算振幅谱，同样要先求出异常的半和曲线，取它的极大值作坐标原点，然后在区间 $(0, \infty)$ 上对半和曲线施用折线逼近法(图 10)，由图上求得各参量的值列于表 7，将这

**参阅安徽冶金地质勘探公司物探队综合组，原桂林冶金地质研究所物探室磁法组《用磁异常二维振幅谱确定磁性体埋深》一文，(载《地质与勘探》1978 年第 2 期)。

***经验证， M_{10} 磁异常确由略具规模的磁铁矿引起。CK291 孔在 332 米以下见矿共 80 余米。分为多层，且各层磁性不一。顶部磁性较强，中间是磁性较弱的黄铁矿和贫矿石。498 米以下见磁性较强的块状磁铁矿。

些值代入(9)式作余弦变换得本例近似公式:

$$\Delta Z_2(\omega) = -\frac{1}{\omega^2} (-0.237 - 0.8\cos\omega + 0.824\cos 2\omega + 0.213\cos 6.5\omega) \quad (23)$$

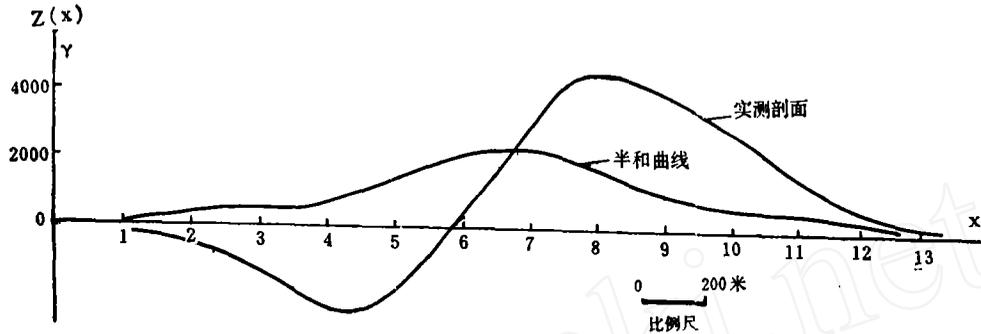


图9 $M_{42}\Delta Z$ 磁异常II号实测剖面及其半和曲线图

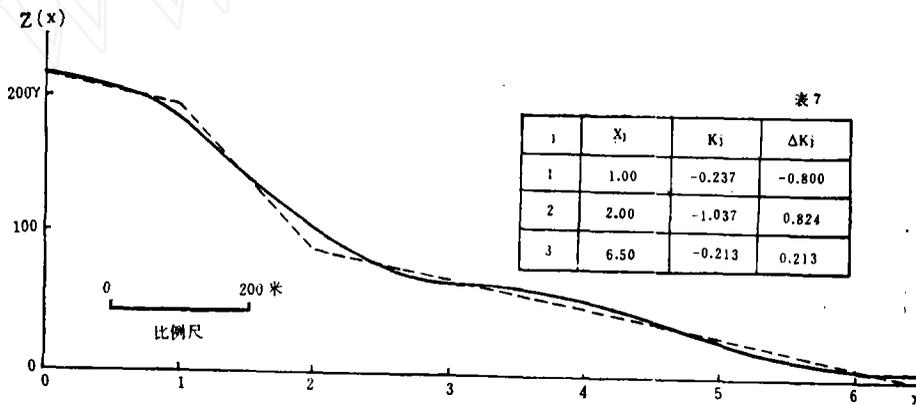


图10 $M_{42}\Delta Z$ 磁异常II号剖面半和曲线及其折线逼近图

(本图横坐标比图9放大了2倍,纵坐标放大了4倍)

由(23)式算得 $\Delta Z(\omega)$, 再按 $|\Delta Z(\omega)| = |2\Delta Z(\omega)|$ 算得本例振幅谱如图11, 图12是它的对数振幅谱。由图可见, 振幅谱及其对数的图象均呈现振荡状态, 表明磁性体有一定水平宽度。它的包络线(见图12中虚线)斜率的绝对值即为磁性体的埋深。经初步验证, 认为 M_{42} 磁异常主要是由有一定分布范围的磁性闪长玢岩和火山岩引起(其中夹有厚度不大的网脉状磁铁矿脉)。CK42-2孔在137.73米以下见磁性闪长玢岩。这与由对数振幅谱确定的磁性体埋深 $h=140$ 米基本吻合。

以上4例说明利用积分变换近似计算方法计算重磁异常振幅谱, 在物探实际工作中是可行的。这种方法所引起的误差可按下述方法估算, 同样以富氏余弦变换(4)式为例:

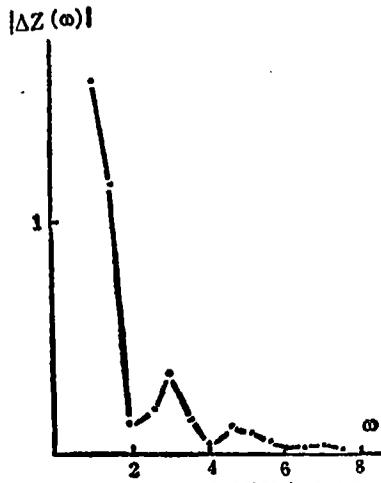


图 11 M₄₂II剖面磁异常振幅谱

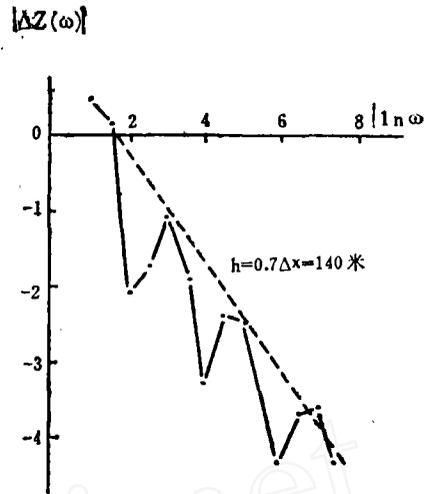


图 12 M₄₂II剖面磁异常对数振幅谱

由于把函数 $g(x)$ 用近似函数 $g_c(x)$ (它是 $n+1$ 段折线)来代替, 其误差等于

$$\delta(\omega) = \int_0^{\infty} [g(x) - g_c(x)] \cos \omega x dx \quad (24)$$

即

$$|\delta(\omega)| \leq \int_0^{\infty} |g(x) - g_c(x)| \cdot |\cos \omega x| dx \quad (25)$$

对于富氏余弦变换, 核 $\cos \omega x$ 是有界函数 $|\cos \omega x| \leq 1$

所以

$$|\delta(\omega)| \leq \int_0^{\infty} |g(x) - g_c(x)| dx \quad (26)$$

由(26)式显见, 误差 $\delta(\omega)$ 的大小取决于 $g(x)$ 曲线与 $g_c(x)$ 曲线所包围的面积的大小。因而在作折线逼近时, 为了使误差足够小, 应使 n 取值较大。但 n 值太大 (即折线分段太多) 时, 又使计算过于繁杂。故 n 值的选取应根据实际工作所允许的误差灵活掌握。例1和例2的理论计算表明, 当 n 等于4~5时, 已能保证误差足够小。

最后应该指出, 如同其他异常转换方法一样, 本文方法同样需要考虑采样间隔 Δx 的选取和曲线两侧数据外延对计算结果的影响。前者直接关系到近似计算公式(9)和(12)中 x_j 值如何确定。 Δx 取不同值, 计算结果也就不同。原因是当 Δx 取较小的值时, 自相关半径较小, 高频振幅谱在计算结果中起的作用较大, 反之则较小。因此如何选取较佳的采样间隔, 这是仍需继续探讨的问题。本文方法的优点在于简单易行, 因而较适用于野外物探快速评价工作。