

风应力对热带斜压海洋的强迫*

巢纪平

(国家海洋局海洋环境科学和数值模拟重点实验室, 青岛 266003)

陈鲜艳**

何金海

P73 A

(南京气象学院, 南京 210044)

摘要 利用一个线性的具有不同密度、温度的热带海洋两层模式, 分析了热带西太平洋对纬圈风应力的响应。解析地求得热带西太平洋温跃层厚度、洋流及海温分布。结果表明次表层温度变化明显要比表层海温变化大, 同时在大洋西部次表层发展起来的扰动向东传播能引起海温分布形态的异常。理论结果支持观测已表明的热带西太平洋物理量的变异在 El Niño / La Niña 事件中起着重要作用的事实。

关键词: 斜压热带海洋; 风应力强迫; 厄尔尼诺

1 引言

El Niño / La Niña 事件和南方涛动结合起来称为 ENSO, 这种海-气相互作用一旦发生异常就会在全世界包括东亚在内的相当多的地区造成气候反常, 因此不少科学家们致力于 ENSO 事件的研究。然而由于大气、海洋运动的复杂性, 以及海上资料的缺乏, 使得对 ENSO 发生机制的认识受到限制。Rasmusson 和 Carpenter^[1]曾把 20 世纪 50 年代以来的 ENSO 事件做过综合分析, 认为热带东太平洋是发生此类事件的先兆所在。然而 20 世纪 80 年代后, 如 1982/1983 年、1986/1987 年、1997/1998 年几次 El Niño 事件其先兆均发生在热带中、西太平洋, 而且又都比较强。最近的资料诊断结果表明, 在 1960~1999 年这 40 年中, 共发生了 11 次 El Niño 事件, 它们的初始正的温度扰动距平, 都首先在热带西太平洋“暖池”160 m 附近的次表层出现, 当发展到一定强度后沿着气候的温跃层向东传播, 并在东太平洋影响到海表。根据这一事实, 巢纪平、张丽^[2]和巢纪平、巢清尘^[3]用热带海洋的等值浅水模式解析地求得了大洋西部对纬圈风应力的响应解, 研究了扰动的发展和向东传播的物理过程。进而巢纪平、陈鲜艳^[4]研究了热带二层层结海洋对纬圈风应力的响应, 结果表明次表层海温的响应强度要远大于表层, 这和观测相符。然而在那个工作中, 为了得到解析解作了较多的假定, 即当时为使问题简化, 并考虑到正压辐散项很小, 因此只给出了已去除正压辐散对斜压模强迫情况下西太平洋对风应力的斜压响应。为得到更准确的响应结果, 在本文中, 作为对文

2000-12-22 收到, 2001-05-27 收到再改稿

* 国家自然科学基金资助项目 49976001、49975025 和国家重点基础发展规划项目 G1998040900 第 I 部分共同资助

** 现在工作单位: 北京市气象局, 北京 100089

献[4]的延拓, 继续采用文献[4]的方法, 加上了正压辐散项对斜压连续方程的强迫, 重新计算西太平洋边界影响下的解。

2 模式简介

模式结构如图 1, 即将海洋分为上、下两层, 厚度、密度和温度各不相同。

设 $z_1 = H_1 + \eta_1$, $z_2 = H_2 + \eta_2$, 其中 H_1 和 H_2 分别是海洋静止时海-气界面和混合层-温跃层界面, D 是海洋处于静止状态下厚度, 而 η_1 及 η_2 则是海洋在运动状态下对这两层平均界面的扰动。

线性控制方程组为

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_s = -g'\nabla h + \frac{\eta}{2}g\alpha\nabla T_s + (\eta_2 - \eta_1)g\alpha\nabla T_b + \frac{\tau}{\eta}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_b = -g'\nabla h + \eta g\alpha\nabla T_s + \left(\frac{h^*}{2} + \eta_2 - \eta_1\right)g\alpha\nabla T_b, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\eta\nabla \cdot \mathbf{u}_s + h^*\nabla \cdot \mathbf{u}_b) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\Delta\bar{T}_s\right)\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\eta}{h^*}\right)\nabla \cdot \mathbf{u}_s + \nabla \cdot \mathbf{u}_b\right]\Delta\bar{T}_b = 0, \quad (5)$$

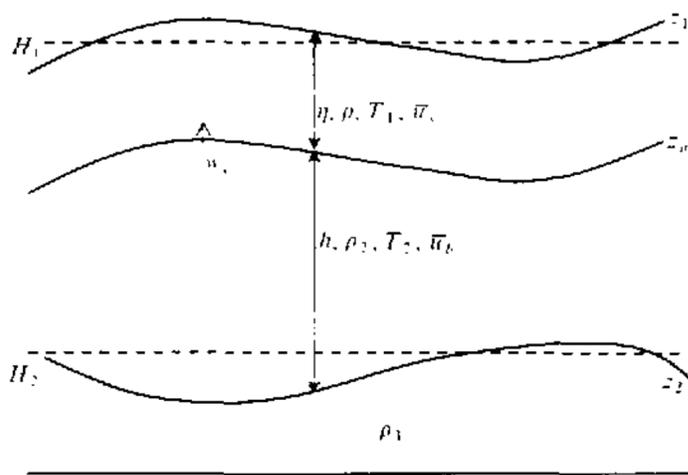


图 1 模式的两层结构

其中下标 s 、 b 分别表示表层和次表层运动, η 为混合层厚度, h 为温跃层厚度, h^* 为 h 的平均值, α 为海水热膨胀系数, τ 为直接作用于表层洋面的风应力, $\Delta\bar{T}_s$ 、 $\Delta\bar{T}_b$ 分别是上下两层流体中的气候温度垂直差, γ 是 η 和 D 的比值。由于是线性模式, 在模式化简时已经去掉了两层之间的非线性垂直交换 (挟卷速度), 而表层和次表层之间就可由 η_1 、 η_2 联系起来, 即 $\eta_2 - \eta_1 = D - \eta - h$ 。

定义运动的正压模和斜压模

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{D}(h^*\mathbf{u}_b + \eta\mathbf{u}_s) = \gamma\mathbf{u}_s + (1-\gamma)\mathbf{u}_b, \\ \tilde{\mathbf{u}} = \gamma(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_b), \end{cases} \quad (6)$$

可见, 不论是正压模还是斜压模, 都受到上、下层流体运动共同作用, 并将两层之间的运动互相联系起来。考虑到 $\eta \ll D$, $(\eta_2 - \eta_1) \ll \frac{h^*}{2}$, 由此得简化的正压模和斜压模的方

程分别为

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}} = -g'\nabla h + \frac{1}{2}g\alpha(2\eta\nabla T_s + h^* \nabla T_b) + \gamma \frac{\tau}{\eta}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + f\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{\gamma}{2}g\alpha(\eta\nabla T_s + h^* \nabla T_b) + \gamma \frac{\tau}{\eta}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + \frac{\Delta \bar{T}_s}{2\eta} \nabla \cdot (\eta \hat{\mathbf{u}} + h^* \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta \bar{T}_b \left[\left(1 + \frac{\eta}{h^*} \right) \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] = 0. \quad (10)$$

取特征量

$$(x, y) \sim (c/2\beta)^{1/2}, \quad h \sim D, \quad (\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) \sim c, \quad T_s \sim \Delta \bar{T}_s, \\ T_b \sim \Delta \bar{T}_b, \quad \tau \sim \tau_0, \quad t \sim (2\beta c)^{-1/2},$$

则在赤道 β 平面上无量纲方程组为

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2}y\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}} = -\nabla h + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 2\nabla T_s + \left(\frac{c_2}{c}\right)^2 \nabla T_b + F\tau, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2}y\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}} = -\gamma \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \nabla T_s - \left(\frac{c_2}{c}\right)^2 \nabla T_b + F\tau, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial T'_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \cdot \left(\hat{\mathbf{u}} + \frac{h^*}{\eta} \tilde{\mathbf{u}} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial T'_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\eta}{h^*} \right) \hat{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \right] = 0, \quad (15)$$

式中 $F = \gamma\tau_0 T / \eta c$, $T = (2\beta c)^{-1/2}$, 而

$$\begin{cases} c_1 = \left(\frac{1}{2}gD\alpha\Delta \bar{T}_s \right)^{1/2}, \\ c_2 = \left(\frac{1}{2}gD\alpha\Delta \bar{T}_b \right)^{1/2} \end{cases} \quad (16)$$

为混合层和温跃层的重力内波波速。引进量 $T' = \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 T_s + \left(\frac{c_2}{c}\right)^2 T_b$, 得到

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + A\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} + B\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (17)$$

式中 A, B 为系数。并可将方程 (11)、(12) 改写成

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2}y\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}} = -\nabla h + \nabla T' + F\tau, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2}y\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}} = -\gamma \nabla T' + F\tau. \quad (19)$$

如取 $D = 20\,000\text{ cm}$, $\eta = 5\,000\text{ cm}$, $\Delta\bar{T}_s = 0.5^\circ\text{C}$, $\Delta\bar{T}_b = 5^\circ\text{C}$ 则对于正压模重力波波速 $c \approx 200\text{ cm s}^{-1}$, 而 c_2 , c_1 值分别约为 98.9 cm s^{-1} , 31.3 cm s^{-1} , 故有 $c_1 < c_2 \ll c$. 因此 (11) 和 (12) 式可简化成

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}y\mathbf{k} \times \hat{u} = -\nabla h + F\tau, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} + \frac{1}{2}y'\mathbf{k} \times \tilde{u} = -\nabla' \tilde{T} + (B\gamma)^{-1/4}F\tau, \quad (21)$$

这可称之为快波近似。为方便起见, 重新写出 (13)、(17) 式如下

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{u} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t'} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y'} = -AB^{-3/4}\gamma^{1/4}\nabla \cdot \hat{u}. \quad (23)$$

由此, 可以看到正压模方程与浅水运动方程相似, 而斜压模方程除了在连续方程的右端多了由正压模造成的强迫之外, 其余也同浅水方程。在前文中我们已经分析了正压模方程组和无正压辐散强迫时的斜压模方程组对风应力响应的解。

3 边界条件

将正压模方程组 (20)、(22) 写成

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{1}{2}y\hat{v} = -\frac{\partial h}{\partial x} + F\tau^x, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}y\hat{u} = -\frac{\partial h}{\partial y} + F\tau^y, \quad (25)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0. \quad (26)$$

引进变量 $\hat{q} = h + \hat{u}$, $\hat{r} = h - \hat{u}$ 代入 (24) ~ (26) 式并将物理量用抛物柱函数 (Weber 函数) 展开成 $(\hat{q}, \hat{r}, \hat{v}, \tau) = \sum_n (\hat{q}_n, \hat{r}_n, \hat{v}_n, \tau_n) D_n(y)$, 有

$$\frac{\partial \hat{q}_0}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}_0}{\partial x} - \hat{v}_{n-1} = F\tau_n^x, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{q}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \hat{q}_1}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\hat{q}_1 = F\frac{\partial \tau_n^x}{\partial t} + F\tau_n^y, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{q}_{n+2}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \hat{q}_{n+2}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}(n+2)\hat{q}_{n+2} = F\frac{\partial \tau_{n+2}^x}{\partial t} + F\tau_{n+1}^y, \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{r}_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{r}_n}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2}(n+1)\hat{r}_n - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\hat{q}_{n+2} = -\frac{\partial F\tau_n^x}{\partial t} - (n+1)F\tau_{n+1}^y, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \hat{q}_{n+2}}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 \hat{q}_{n+2}}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{2}(2n+3) \frac{\partial \hat{q}_{n+2}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{q}_{n+2}}{\partial x} = \frac{\partial^2 F\tau_{n+2}^x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F\tau_{n+2}^x}{\partial t \partial x} \\ + \frac{1}{2}(n+1)F\tau_{n+2}^x - \frac{1}{2}F\tau_n^x + \frac{\partial F\tau_{n+1}^y}{\partial t} - \frac{\partial F\tau_{n+1}^y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \hat{r}_n}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 \hat{r}_n}{\partial t \partial x^2} + \frac{1}{2}(2n+1) \frac{\partial \hat{r}_n}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{r}_n}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F\tau_n^x}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F\tau_n^x}{\partial x \partial t} \\ + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)F\tau_{n+2}^x - \frac{1}{2}(n+2)F\tau_n^x - (n+1) \frac{\partial F\tau_{n+1}^y}{\partial t} - (n+1) \frac{\partial F\tau_{n+1}^y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_{n+1}}{\partial t} + \frac{1}{2}(n+2)\hat{q}_{n+2} - \frac{1}{2}\hat{r}_n = F\tau_{n+1}^y. \quad (33)$$

引进拉普拉斯变换 $\hat{G}_n = \int_0^\infty e^{-st} \hat{g}_n dt$, 这里 g 表示任一物理量, 其中 s 在物理意义上相当于频率 ω . 以上方程可写成

$$\frac{d\hat{Q}_0}{dx} + s\hat{Q}_0 = F\hat{\tau}_0^x, \quad (34)$$

$$s \frac{d\hat{Q}_1}{dx} + \left(s^2 + \frac{1}{2}\right)\hat{Q}_1 = sF\hat{\tau}_1^x + F\hat{\tau}_0^y, \quad (35)$$

$$s \frac{d\hat{Q}_{n+2}}{dx} + \left[\frac{1}{2}(n+2) + s^2\right]\hat{Q}_{n+2} - \frac{1}{2}\hat{R}_n = sF\hat{\tau}_{n+2}^x + F\hat{\tau}_{n+1}^y, \quad (36)$$

$$s \frac{d\hat{R}_n}{dx} - \left[\frac{1}{2}(n+1) + s^2\right]\hat{R}_n + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\hat{Q}_{n+2} = sF\hat{\tau}_n^x + (n+1)F\hat{\tau}_{n+1}^y, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} s \frac{d^2 \hat{Q}_{n+2}}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d\hat{Q}_{n+2}}{dx} - \left[\frac{1}{2}(2n+3)s + s^3\right]\hat{Q}_{n+2} \\ = F \left\{ s \frac{d\hat{\tau}_n^x}{dx} - \left[\frac{1}{2}(n+1) + s^2\right]\hat{\tau}_{n+2}^x + \frac{1}{2}\hat{\tau}_n^x \right\} + F \left(\frac{d\hat{\tau}_{n+1}^y}{dx} - s\hat{\tau}_{n+1}^y \right), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} s \frac{d^2 \hat{R}_n}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d\hat{R}_n}{dx} - \left[\frac{1}{2}(2n+3)s + s^3\right]\hat{R}_n = F \left\{ s \frac{d\hat{\tau}_n^x}{dx} + \left[\frac{1}{2}(n+2) + s^2\right]\hat{\tau}_n^x \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\hat{\tau}_{n+2}^x \right\} + F \left[(n+1) \frac{d\hat{\tau}_{n+1}^y}{dx} + (n+1)s\hat{\tau}_{n+1}^y \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$s\hat{V}_{n+1} + \frac{1}{2}(n+2)\hat{Q}_{n+2} - \frac{1}{2}\hat{R}_n = F\hat{\tau}_{n+1}^y. \quad (40)$$

由于在动力学上, 纬圈半地转模式中, Kelvin 波和 Rossby 波都是非色散的, 这样波能量就不能以不同于信号传播速度传播. 而在经圈半地转模式中, Rossby 短波的群速度虽然不同于相速度, 但短波能量只能单向(向东)传播. 基于这种前提下, 巢纪平^[5]提出了低频近似下的发展运动. 设热带惯性运动的平均频率或参考频率为 f_0 , 运动的特征频率为 ω , 若运动的特征频率满足条件 $\omega < f_0$ 或 $\omega^2 \ll f_0^2$, 则称此为低频近似,

即相当于滤去频率较高的重力波。将低频近似运用到本模式,可以在模式中略去与时间运动有关特征的二次项或更高次项。由此可得

$$\frac{d\hat{Q}_0}{dx} + s\hat{Q}_0 = F\hat{\tau}_0^x, \quad (41)$$

$$s\frac{d\hat{Q}_1}{dx} + \frac{1}{2}\hat{Q}_1 = sF\hat{\tau}_1^x + F\hat{\tau}_0^y, \quad (42)$$

$$s\frac{d^2\hat{Q}_{n+2}}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d\hat{Q}_{n+2}}{dx} - \frac{1}{2}(2n+3)s\hat{Q}_{n+2} = F\left[s\frac{d\hat{\tau}_{n+2}^x}{dx} - \frac{1}{2}(n+1)\hat{\tau}_{n+2}^x + \frac{1}{2}\hat{\tau}_n^x\right] + F\left(\frac{d\hat{\tau}_{n+1}^y}{dx} - s\hat{\tau}_{n+1}^y\right), \quad (43)$$

$$s\frac{d^2\hat{R}_n}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d\hat{R}_n}{dx} - \frac{1}{2}(2n+3)s\hat{R}_n = F\left[s\frac{d\hat{\tau}_n^x}{dx} + \frac{1}{2}(n+2)\hat{\tau}_n^x + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\hat{\tau}_{n+2}^x\right] + F\left[(n+1)\frac{d\hat{\tau}_{n+1}^y}{dx} + (n+1)s\hat{\tau}_{n+1}^y\right], \quad (44)$$

容易看出,方程(41)的自由方程描写的是 Kelvin 波,方程(43)、(44)相当位势涡度方程,描写的是 Rossby 波。

方程(36)、(37)对 x 的微商是一阶的,其可作为对(38)、(39)式的边条件。在边界上法向速度为 0,若边界是南北走向的,则有 $\hat{u}_n = 0$,于是根据前面定义,有 $\hat{q}_n = \hat{r}_n = \hat{h}_n$ 。为与模式的近似度协调,现考虑在边界上也无高频运动作用。则由(36)、(37)式当 $x=0$ 时,有

$$s\frac{d\hat{Q}_{n+2}}{dx} + \frac{1}{2}(n+2)\hat{h}_{n+2} - \frac{1}{2}\hat{h}_n = Fs\hat{\tau}_{n+2}^x + F\hat{\tau}_{n+1}^y, \quad (45)$$

$$s\frac{d\hat{R}_n}{dx} - \frac{1}{2}(n+1)\hat{h}_n + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\hat{h}_{n+2} = Fs\hat{\tau}_n^x + (n+1)F\hat{\tau}_{n+1}^y, \quad (46)$$

由于文章只研究半无界海洋解,另一个条件要求

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \hat{Q}_n, \hat{R}_n \rightarrow \text{有限}, \quad (47)$$

经圈流可表示为

$$s\hat{V}_{n+1} + \frac{1}{2}(n+2)\hat{Q}_{n+2} - \frac{1}{2}\hat{R}_n = F\hat{\tau}_{n+1}^y. \quad (48)$$

4 正压模对纬圈风应力的响应

由于在赤道地区以西风为主,因此本文主要研究西边界对纬圈风应力 τ^x 的响应,如风应力集中在赤道附近,则可取风应力在 y 方向用 Weber 函数的 0 阶模表示,即

$\tau^x(y) = D_0(y) = e^{-y^2/4}$ 。并给出风应力随时间变化为 $\hat{X} = \frac{1 - 2e^{-t_0 s}}{s}$ ，如 $\tau_0 > 0$ ，则相当于洋面上先吹东风，到 $t = t_0 = 10$ 时刻转成西风。其他变量截取到 4 阶 (n 取 0, 2, 4)，可得到以上方程的截断模解如下：

$$\hat{h}_0 = \frac{1}{2}(\hat{Q}_0 + \hat{R}_0) = \frac{F\hat{X}}{6s}(1 - 5e^{-sx}), \quad (49)$$

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2}(\hat{Q}_0 - \hat{R}_0) = \frac{5F\hat{X}}{6s}(1 - e^{-sx}), \quad (50)$$

$$\hat{h}_2 = \frac{1}{2}(\hat{Q}_2 + \hat{R}_2) = -\frac{F\hat{X}}{6s}[1 + e^{-(1/2s+7s)x}], \quad (51)$$

$$\hat{U}_2 = \frac{1}{2}(\hat{Q}_2 - \hat{R}_2) = -\frac{F\hat{X}}{6s}[1 - e^{-(1/2s+7s)x}], \quad (52)$$

$$\hat{h}_4 = \frac{1}{2}(\hat{Q}_4 + \hat{R}_4) = -\frac{F\hat{X}}{18s}[e^{-(1/2s+7s)x} + e^{-(1/2s+11s)x}], \quad (53)$$

$$\hat{U}_4 = \frac{1}{2}(\hat{Q}_4 - \hat{R}_4) = -\frac{F\hat{X}}{18s}[e^{-(1/2s+7s)x} - e^{-(1/2s+11s)x}], \quad (54)$$

5 斜压模对赤道纬圈风应力的响应

由斜压模方程组

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t'} - \frac{1}{2}y'\tilde{v} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x'} + B^* F\tau^x, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t'} + \frac{1}{2}y'\tilde{u} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y'}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t'} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y'} = -A^* \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = A^* \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (57)$$

其中 $A^* = AB^{-3/4}\gamma^{1/4}$ ， $B^* = (B\gamma)^{-1/4}$ 。

同正压模方法，引进变量 $\tilde{q} = \tilde{T} + \tilde{u}$ ， $\tilde{r} = \tilde{T} - \tilde{u}$ ，并经用抛物圆柱函数、拉普拉斯变换以及低频近似后，可得

$$\frac{d\tilde{Q}_0}{dx'} + s\tilde{Q}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [A^* (B\gamma)^{3/4} s\hat{h}_m + B^* (B\gamma)^{1/4} F\hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_0(y') dy', \quad (58)$$

$$\begin{aligned} s \frac{d^2 \tilde{Q}_{n+2}}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{Q}_{n+2}}{dx'} - \frac{1}{2} (2n+3) s \tilde{Q}_{n+2} = & -\frac{1}{2} \frac{n+1}{(n+2)! \sqrt{2\pi}} [A^* (B\gamma)^{3/4} s\hat{h}_m \\ & + B^* F(B\gamma)^{1/4} \hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_{n+2}(y') dy' - \frac{1}{2n! \sqrt{2\pi}} [A^* (B\gamma)^{3/4} s\hat{h}_m \\ & - (B\gamma)^{1/4} B^* F\hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_n(y') dy', \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
s \frac{d^2 \tilde{R}_n}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{R}_n}{dx'} - \frac{1}{2} (2n+3) s \tilde{R}_n &= - \frac{n+2}{2n! \sqrt{2\pi}} [A^* (B\gamma)^{3/4} s \hat{h}_m \\
&- B^* F(B\gamma)^{1/4} \hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_0(y') dy' - \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)! \sqrt{2\pi}} [A^* (B\gamma)^{3/4} s \hat{h}_m \\
&+ B^* (B\gamma)^{1/4} F \hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_{n+2}(y') dy', \quad (60)
\end{aligned}$$

$$s \tilde{V}_n + \frac{1}{2} (n+1) \tilde{Q}_{n+1} - \frac{1}{2} \tilde{R}_{n-1} = 0, \quad (61)$$

此时方程 (58) 描写的是斜压 Kelvin 波, 方程 (59)、(60) 描写的是斜压 Rossby 波。需注意的是在方程组的右端正压模和斜压模具有不同的经向尺度。

同样有边界条件表示为, 当 $x=0$,

$$s \frac{d\tilde{Q}_n}{dx'} + \frac{n}{2} \tilde{Q}_n - \frac{1}{2} \tilde{R}_{n-2} = \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} [(B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_n(y') dy', \quad (62)$$

$$\begin{aligned}
s \frac{d\tilde{R}_n}{dx'} - \frac{1}{2} (n+2) \tilde{R}_n + \frac{1}{2} (n+1)(n+2) \tilde{Q}_{n+2} \\
= \frac{1}{n! \sqrt{2\pi}} [(B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_m^x] \int_{-\infty}^{+\infty} D_m(y) D_n(y') dy', \quad (63)
\end{aligned}$$

及当 $x' \rightarrow \infty$,

$$\tilde{Q}_n, \tilde{R}_n \rightarrow \text{有限}. \quad (64)$$

对前述风应力, 得截断模方程

$$s \frac{d\tilde{Q}_0}{dx'} + s \tilde{Q}_0 = B^* (B\gamma)^{1/4} F \hat{\tau}_0^x a_{00} + A^* (B\gamma)^{3/4} s (\hat{h}_0 a_{00} + \hat{h}_2 a_{20} + \hat{h}_4 a_{40}), \quad (65)$$

$$\begin{aligned}
s \frac{d^2 \tilde{Q}_2}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{Q}_2}{dx'} - \frac{3}{2} s \tilde{Q}_2 &= - \frac{1}{2} B^* F (B\gamma)^{1/4} (\hat{\tau}_0^x a_{02} - \hat{\tau}_0^x a_{00}) \\
&- \frac{1}{2} A^* (B\gamma)^{3/4} s (\hat{h}_0 a_{02} + \hat{h}_2 a_{22} + \hat{h}_4 a_{42} + \hat{h}_0 a_{00} + \hat{h}_2 a_{20} + \hat{h}_4 a_{40}), \quad (66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s \frac{d^2 \tilde{Q}_4}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{Q}_4}{dx'} - \frac{7}{2} s \tilde{Q}_4 &= - \frac{3}{2} B^* F (B\gamma)^{1/4} (\hat{\tau}_0^x a_{04} - \hat{\tau}_0^x a_{02}) \\
&- \frac{3}{2} A^* (B\gamma)^{3/4} s (\hat{h}_0 a_{04} + \hat{h}_2 a_{24} + \hat{h}_4 a_{44} + \hat{h}_0 a_{02} + \hat{h}_2 a_{22} + \hat{h}_4 a_{42}), \quad (67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s \frac{d^2 \tilde{R}_0}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{R}_0}{dx'} - \frac{3}{2} s \tilde{R}_0 &= B^* F (B\gamma)^{1/4} (\hat{\tau}_0^x a_{00} - \hat{\tau}_0^x a_{02}) - A^* (B\gamma)^{3/4} s (\hat{h}_0 a_{00} \\
&+ \hat{h}_2 a_{20} + \hat{h}_4 a_{40} + \hat{h}_0 a_{02} + \hat{h}_2 a_{22} + \hat{h}_4 a_{42}), \quad (68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s \frac{d^2 \tilde{R}_4}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{R}_4}{dx'} - \frac{7}{2} s \tilde{R}_4 &= 2B^* F (B\gamma)^{1/4} (\hat{\tau}_0^x a_{02} - 3\hat{\tau}_0^x a_{00}) \\
&- 2A^* (B\gamma)^{3/4} s (\hat{h}_0 a_{02} + \hat{h}_2 a_{22} + \hat{h}_4 a_{42} + 3\hat{h}_0 a_{04} + \hat{h}_2 a_{24} + \hat{h}_4 a_{44}), \quad (69)
\end{aligned}$$

$$s \frac{d^2 \tilde{R}_4}{dx'^2} + \frac{1}{2} \frac{d \tilde{R}_4}{dx'} - \frac{11}{2} s \tilde{R}_4 = 3B^* F(B\gamma)^{1/4} \hat{\tau}_0^x a_{04} - 3A^* (B\gamma)^{3/4} s(\hat{h}_0 a_{04} + \hat{h}_2 a_{24} + \hat{h}_4 a_{44}), \quad (70)$$

注意到由于在斜压连续方程中有正压模辐散项的强迫, 因此在这组方程组中除了出现与前文相同的风应力 0 阶模外, 另外非齐次项中还多了温跃层厚度强迫的项 (其中系数见附录 1)。

边条件写成 ($x=0$ 时)

$$s \frac{d \hat{Q}_2}{dx'} + \hat{T}_2 - \frac{1}{2} \hat{T}_0 = (B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_0^x a_{02}, \quad (71)$$

$$s \frac{d \hat{Q}_4}{dx'} + 2 \hat{T}_4 - \frac{1}{2} \hat{T}_2 = (B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_0^x a_{04}, \quad (72)$$

$$s \frac{d \tilde{R}_0}{dx'} - \frac{1}{2} \hat{T}_0 + \hat{T}_2 = (B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_0^x a_{00}, \quad (73)$$

$$s \frac{d \tilde{R}_2}{dx'} - \frac{3}{2} \hat{T}_2 + \hat{T}_4 = (B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_0^x a_{02}, \quad (74)$$

$$s \frac{d \tilde{R}_4}{dx'} - \frac{5}{2} \hat{T}_4 = (B\gamma)^{1/2} B^* F s \hat{\tau}_0^x a_{04}, \quad (75)$$

容易得到解为

$$\hat{T}_0 = [b_1 + b_2 e^{-(B\gamma)^{1/2} s x'}] \frac{\hat{X}}{s} e^{-s x'} + b_3 \frac{\hat{X}}{s} + b_4 \frac{\hat{X}}{s} e^{-(B\gamma)^{1/2} s x'}, \quad (76)$$

$$\tilde{U}_0 = [b_5 + b_6 e^{-(B\gamma)^{1/2} s x'}] \frac{\hat{X}}{s} e^{-s x'} + b_7 \frac{\hat{X}}{s} + b_8 \frac{\hat{X}}{s} e^{-(B\gamma)^{1/2} s x'}, \quad (77)$$

$$\hat{T}_2 = b_9 \frac{\hat{X}}{s} e^{-(1/2s+7s)x'} + b_{10} \frac{\hat{X}}{s}, \quad (78)$$

$$\tilde{U}_2 = b_{11} \frac{\hat{X}}{s} e^{-(1/2s+7s)x'} + b_{12} \frac{\hat{X}}{s}, \quad (79)$$

$$\hat{T}_4 = b_{13} \frac{\hat{X}}{s} e^{-(1/2s+7s)x'} + b_{14} \frac{\hat{X}}{s} e^{-(1/2s+11s)x'} + b_{15} \frac{\hat{X}}{s}, \quad (80)$$

$$\tilde{U}_4 = b_{16} \frac{\hat{X}}{s} e^{-(1/2s+7s)x'} + b_{17} \frac{\hat{X}}{s} e^{-(1/2s+11s)x'} + b_{18} \frac{\hat{X}}{s}. \quad (81)$$

系数及拉普拉斯反变化的解见附录 2。

经圈流的表达式由 $\tilde{V}_{n+1} = \frac{1}{2s} [\tilde{R}_n - (n+2)] \tilde{Q}_{n+2}$ 给出, 在此略。

上述解的形式中基本包含了三个部分, 一为风应力直接作用, 二是以 $e^{-s x'}$ 为表征的 Kelvin 波动, 三是以 $e^{-\frac{1}{s} x'}$ 为表征的边界处 Rossby 短波。并且还可以注意到这些结果的形式和组成与没有辐散强迫时的解很相似, 但是在系数上又增加了表征辐散强迫项的内容。

6 结果分析

文中有关的参数值同文献[4], 取 $\eta = 5\,000\text{ cm}$, $h^* = 15\,000\text{ cm}$, $D = 20\,000\text{ cm}$, $\gamma = 0.25$, $c = 200\text{ cm s}^{-1}$, $g = 980\text{ cm s}^{-2}$, $g' = 2\text{ cm s}^{-2}$, $\alpha = 2 \times 10^{-4}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. 根据以上参数可得量纲 $X = 210\text{ km}$, $Y = 210\text{ km}$, $t = 29.3\text{ h}$. 从斜压模解的表达式可以看出正压模对斜压模的辐散强迫主要由系数 A^* 决定. 当 A^* 取 0 时的响应我们以前分析过, 而 A^* 取不同值时, 斜压模对风应力的响应显然也会不同. 为便于比较, 在此首先给出正压模温跃层沿赤道的传播 (图 2). 最初东风作用时, 大洋西边界处先激发出一个暖 Kelvin 波东传, $t > t_0 = 10$ 后风场变向转为西风, 西边界处又激发出一个冷 Kelvin 波. 由于海洋的“记忆”, 注意到虽然温跃层深度在 Kelvin 波经过后就有变化, 但边界处温跃层符号在 $t > 20$ 后才开始由正转负. 此前大洋温跃层厚度沿赤道呈东高西低的形势, 相对海温而言是东暖西冷, 而当 $t > 20$ 之后, 暖水逐渐传到大洋东部, 而西边界也开始有了冷水出现, 当 $t = 40$ 时, 海水分布相当于一个 El Niño 位相. 正如 Fedorov 等^[6]曾经指出的那样, 无论定常风突然张弛还是突然转向, 都会激发出一个可以影响到 El Niño 的 Kelvin 波动. Long 等^[7]还分别用观测资料和数值试验结果来证明在赤道地区 Kelvin 波在 ENSO 或其他一些海洋事件中确有着重要作用. 在这里还注意到, 西风的盛吹一方面推动由东风应力作用下激发出的暖的 Kelvin 波向东传播, 造成 El Niño 位相; 另一方面, 西风应力在大洋西边界又激发出冷的 Kelvin 波, 当这一个冷波向东传播后, 就出现 El Niño 位相向 La Niña 位相的转变.

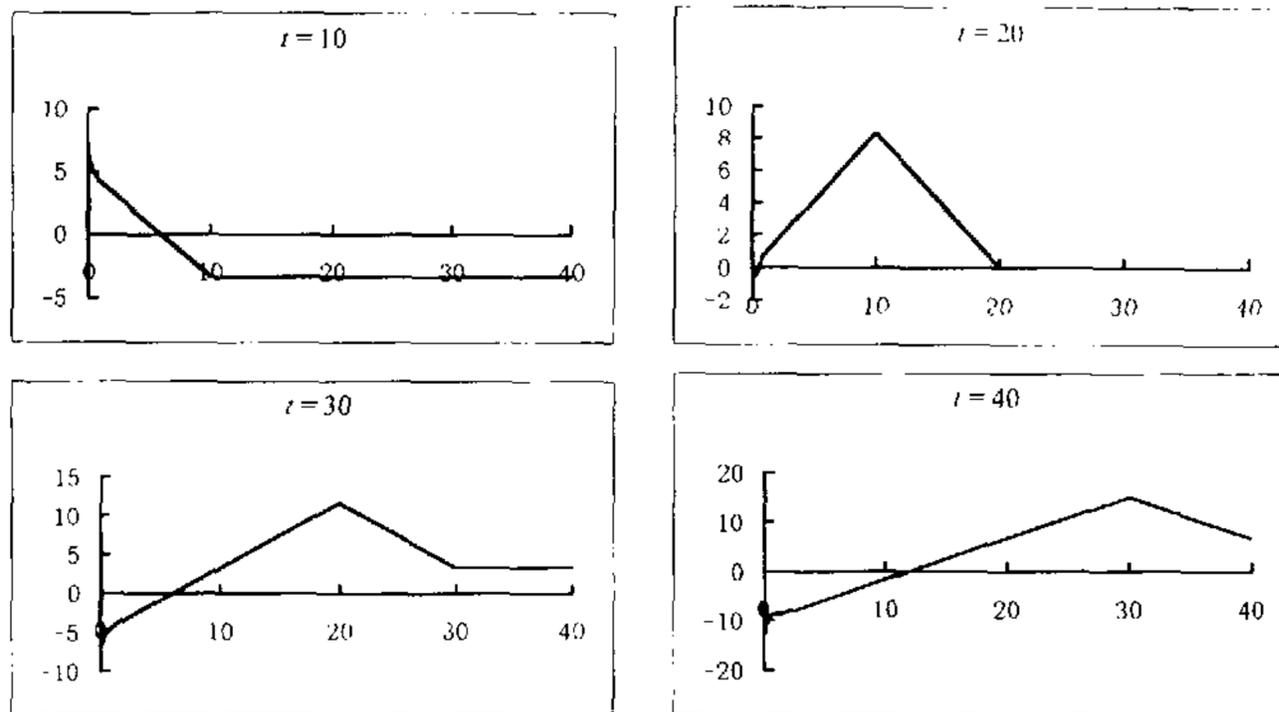


图 2 西太平洋边界附近温跃层在 t 时刻沿赤道随 x 的变化分布
 y 轴为温跃层厚度 (单位: 10 m), x 轴为离开边界的距离 (单位: 1 km)

图 3 给出了上述风应力变化情况下沿赤道表层、次表层温度的传播 (由于表层、次表层海水温度变化的无量纲数不是一个量级, 为便于比较, 在计算时已将海水温度的单位均用 $^{\circ}\text{C}$ 表示)。可以看到前期东风风场刚开始作用时, 海洋表现出西暖东冷的形式。一定时间 ($t > t_0$) 后异常西风盛吹于洋面上, 这时在西边界激发出的冷 Kelvin 波东传, 波前沿的暖水被冷水波向东推进。当 $t > 2t_0$ 后洋面上已经表现出西冷东暖的状态, 出现了 El Niño 型的海水分布。西风的持续作用使东太平洋的海水继续增温, 发展

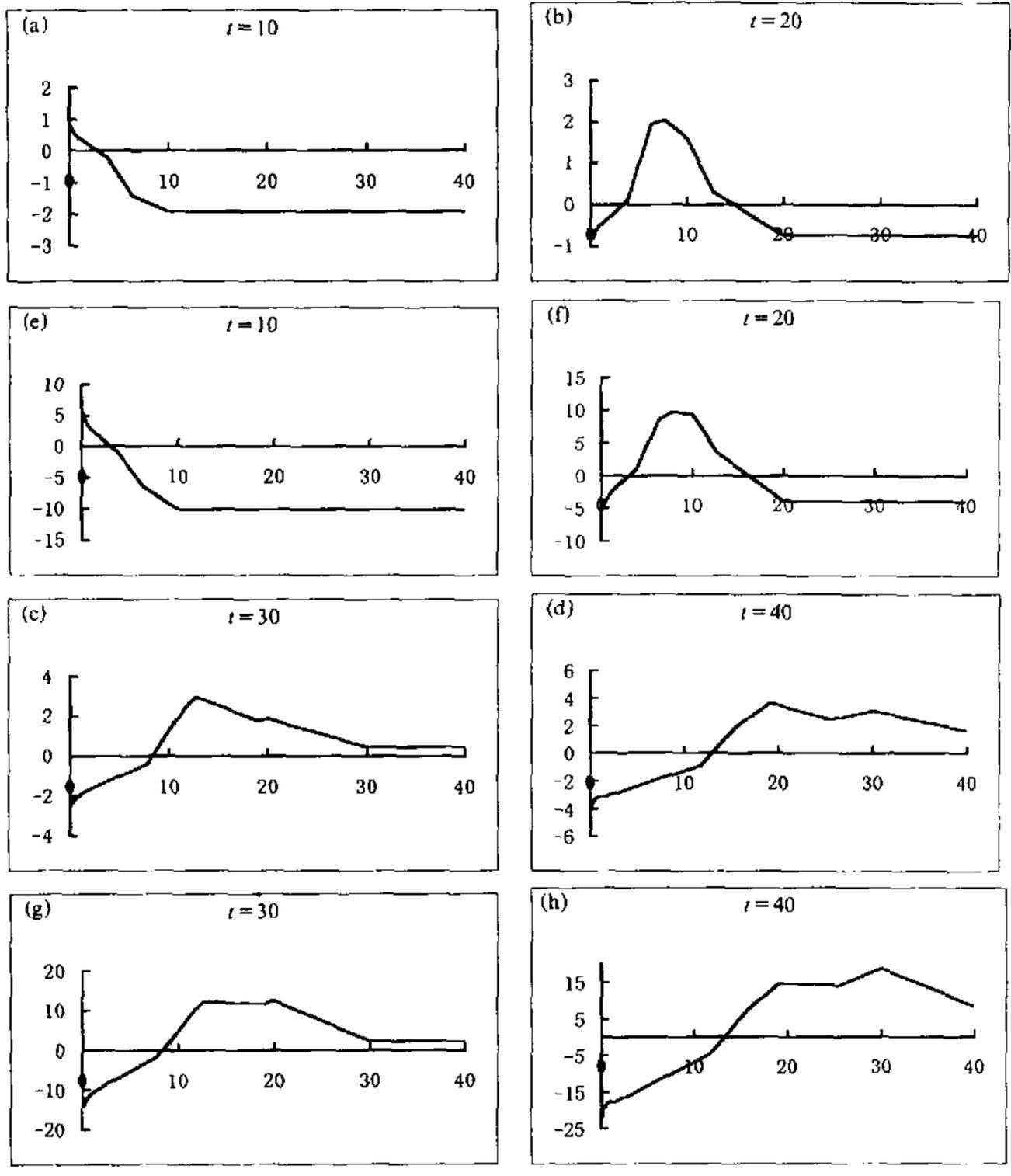


图 3 表层、次表层温度在不同时刻沿赤道随 x 的变化
 y 轴为温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$), x 轴为离开边界的距离 (单位: km)
 (a) ~ (d) 为表层温度, (e) ~ (h) 为次表层温度

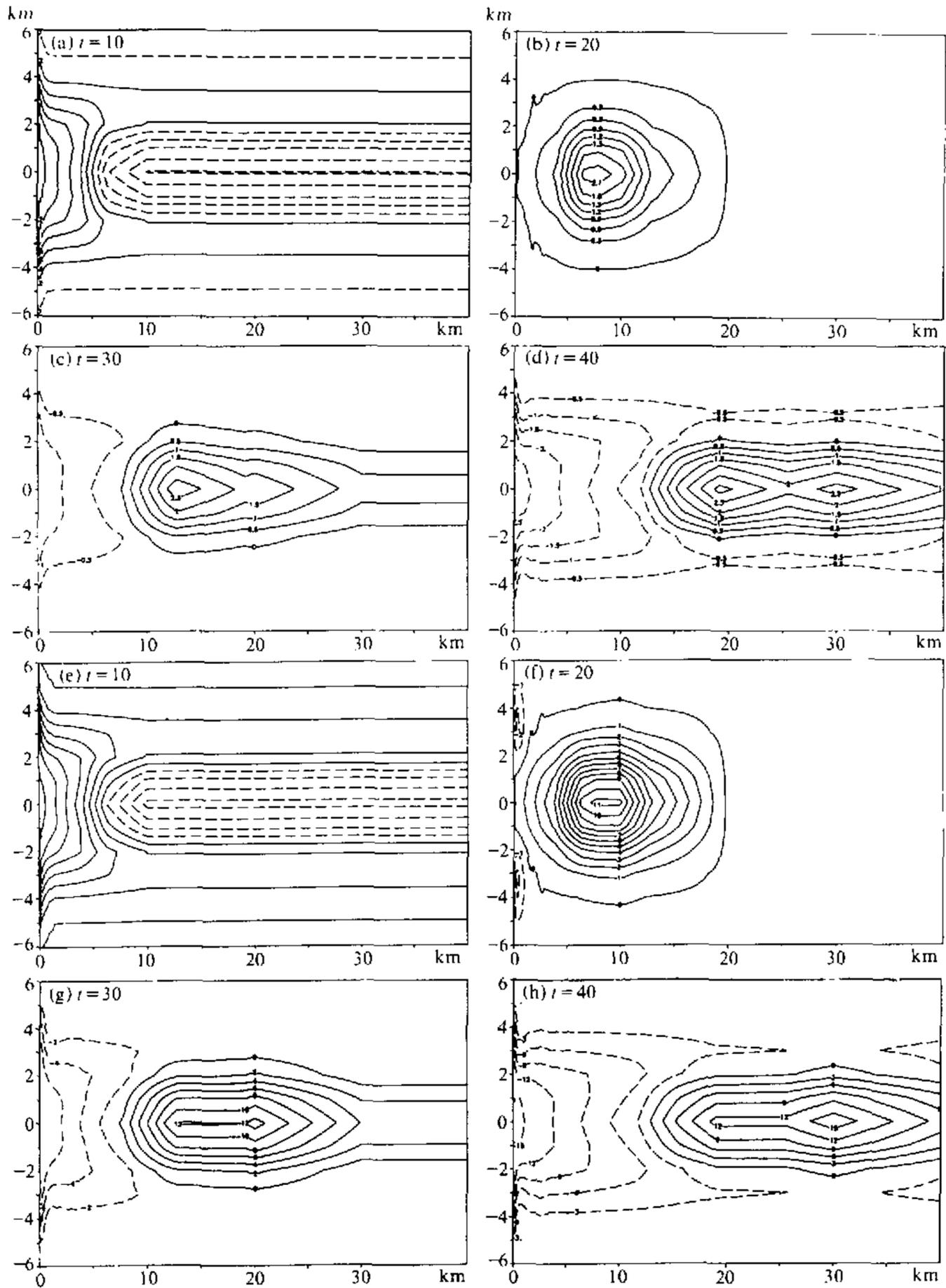


图4 不同时刻表层、次表层温度分布

y 轴为经向距离(单位: km), x 轴为离开边界的距离(单位: km)

(a) ~ (d) 为表层海水在各时刻的温度分布, (e) ~ (h) 为次表层海水在各时刻的温度分布

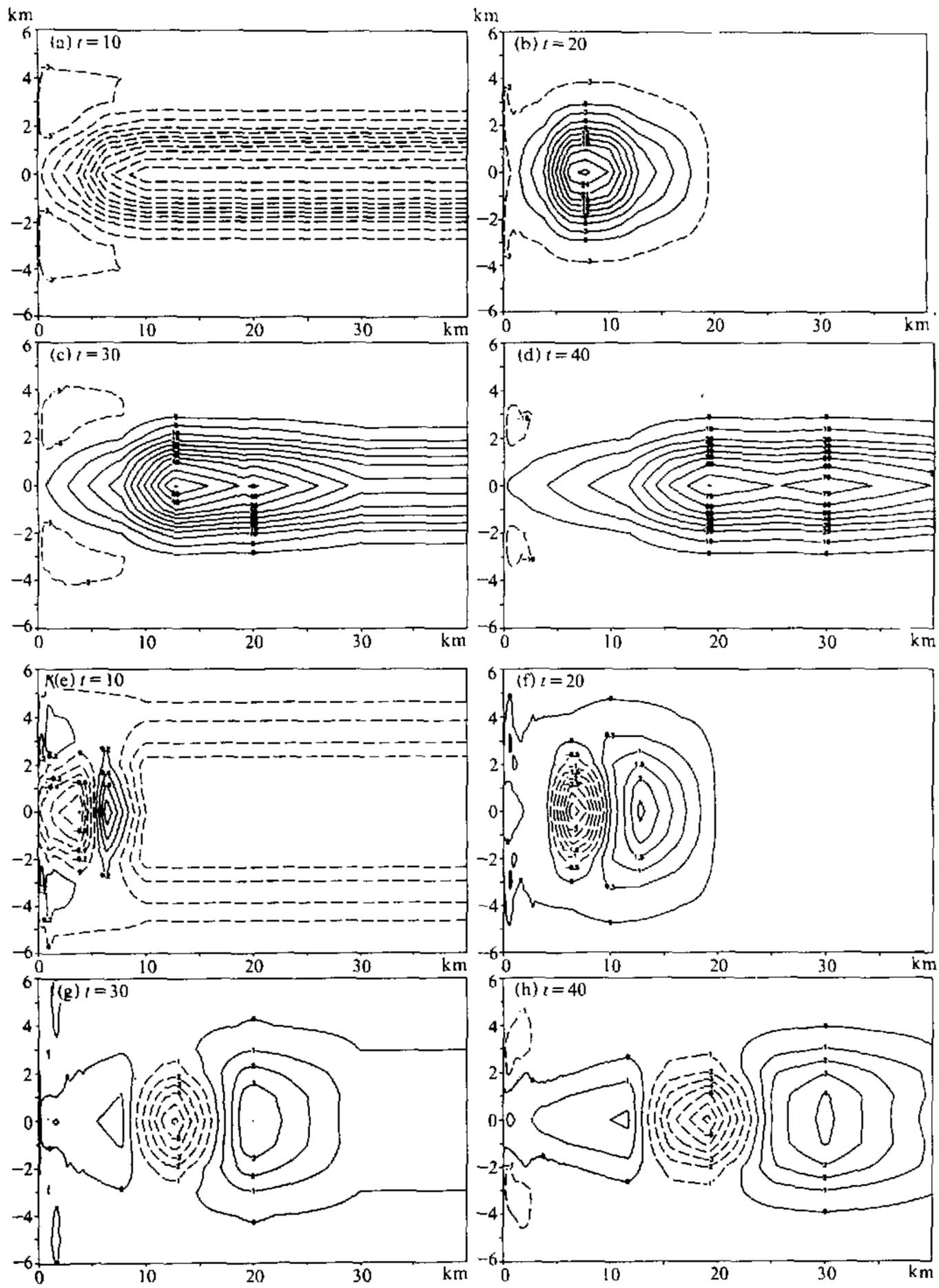


图5 不同时刻表层、次表层洋流分布
 y轴为径向距离(单位: km), x轴为离开边界的距离(单位: km)
 (a) ~ (d) 为表层洋流在各时刻的分布, (e) ~ (h) 为次表层洋流在各时刻的分布

至 $t = 4t_0$ 时已演变为 El Niño 成熟期, 可以预计若西风继续作用, 则西太平洋出现异常的冷水将东传至东太平洋, 而整个洋面海水温度降低。事实上, 从 $t = 4t_0$ 时已经可以看到这时的冷水已向东传播了。此时若西风张弛, 或东风出现 (在西边界又重新激发出暖的 Kelvin 波东传) 可能会形成 La Niña 型海水分布。不管是何种异常海温型态出现, 我们都有理由认为事件的先兆是从西太平洋传至东太平洋的。而且, 图中可看到次表层的温度变化的振幅比表层温度大了将近一个量级, 也就是说, 当有异常强迫条件发生时, 次表层的物理变化比表层的变化更为显著。这个结果与近年来的观测事实一致。温度的平面分布也说明了这个特征 (图 4)。

图 5 是表层洋流和次表层洋流的传播情况。表层流在风应力的直接驱动下, 其流速要比次表层大出一个量级, 而且也直观地表现出了 Kelvin 波传播的特征。

图 6 是不考虑正压辐散对斜压模强迫时温度沿赤道的传播, 可以看到, 正压辐散的强迫使次表层温度的变化加大约 50%。

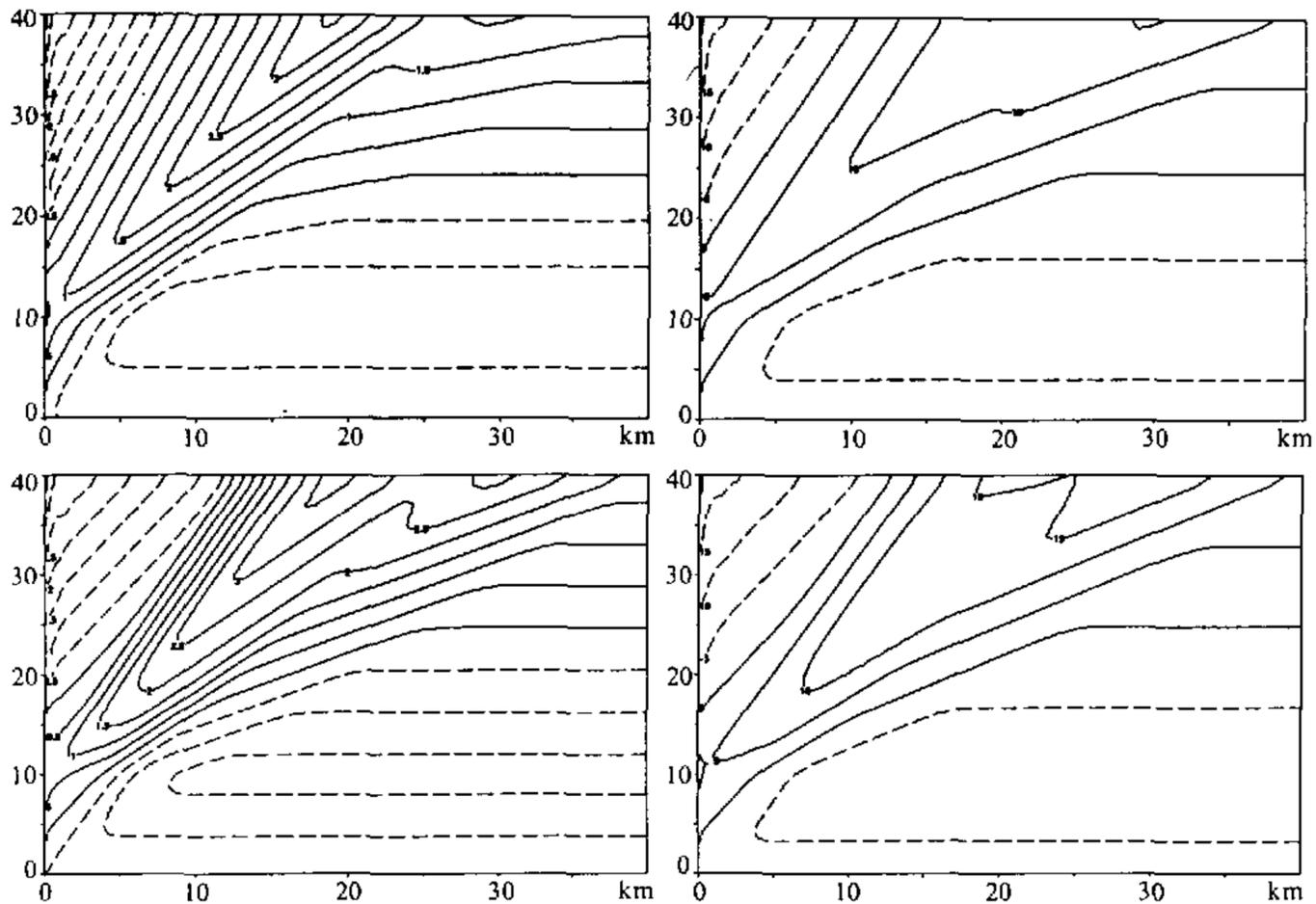


图 6 表层、次表层在不同强迫条件下沿赤道传播
 x 轴为离开西边界距离 (单位: km), y 轴为时间 t (单位: d)
 (a) ~ (b) 无正压模项强迫斜压连续方程, (c) ~ (d) 有正压模项强迫斜压连续方程

7 结论

用正压辐散来强迫斜压连续方程, 计算得在西太平洋边界处的两层海洋模式中不同层的温度、洋流的传播解。解析结果表明, 当风场变化时, 西太平洋次表层的温度变化

可比表层温度变化大一个量级, 在不同方向的纬圈风应力作用下, 扰动的向东传播可能产生不同的海温异常分布型态。这也就是说, 在大气强迫发生变化时, 热带西太平洋在 El Niño 或 La Niña 事件中都会起重要作用, 一些 El Niño / La Niña 事件, 尤其是强事件发生前, 其先兆可能先出现于热带西太平洋的暖池海域, 而后才传播到热带东太平洋海区。

参 考 文 献

- 1 Rasmusson, S. G. H., El Niño Southern Oscillation phenomena, *Nature*, 1983, **302**, 296~301.
- 2 巢纪平, 张丽, 赤道不同海域对信风张弛的响应特征——对 El Niño 研究的启示, *大气科学*, 1998, **22**, 428~442.
- 3 巢纪平, 巢清尘, 热带西太平洋对风应力响应的动力学, *大气科学*, 2002, **26**(2), 145~160.
- 4 巢纪平, 陈鲜艳, 何金海, 热带西太平洋对风应力的斜压响应, *地球物理学报*, 2002, **45**(2), 176~187.
- 5 巢纪平, 热带斜压大气的适应运动和发展运动, *中国科学 (D 辑)*, 1999, **29**, 279~288.
- 6 Fedorov, A. V. and W. K. Melville, Kelvin Fronts on the Equatorial Thermocline, *J. Phys. Oceanogr.*, 2000, **30**(7), 1692~1705.
- 7 Long, B. and Ping Chang, Propagation of an Equatorial Kelvin Wave in a Varying Thermocline, *J. Geophys. Res.*, 1990, **95**, 1826~1841.

The Wind Stress Force upon the Tropical Baroclinic Ocean

Chao Jiping

(Key Laboratory for Marine Environment Science and Numerical Simulation, State Oceanic Administration, Qingdao 266003)

Chen Xianyan and He Jinhai

(Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing 210044)

Abstract The response of the western tropical Pacific to zonal wind stress is analyzed based on a linearly two-layer oceanic model with different density and temperature in surface and sub-surface layer, and the distribution of thermocline depth, current velocity and sea temperature of different layers are calculated. Results show that the temperature disturbance developed in the sub-surface layer travels eastward in the form of Kelvin waves, and so do other variables. The changeable amplitude of sub-surface temperatures is greater than that of surface, which accords with the fact that the anomaly of the physical fields in the western tropical Pacific plays an important role in El Niño and La Niña events.

Key words: barocline tropical ocean; wind stress forcing; El Niño

附录

1 温跃层厚度强迫项的系数

$$a_{00} = \sqrt{\frac{2}{1 + (B\gamma)^{1/2}}},$$

$$a_{02} = \left[\frac{1}{1 + (B\gamma)^{1/2}} - \frac{1}{2} \right] a_{00},$$

$$a_{04} = \left\{ \frac{1}{2[1 + (B\gamma)^{1/2}]^2} - \frac{1}{2[1 + (B\gamma)^{1/2}]} + \frac{1}{8} \right\} a_{00},$$

$$a_{20} = \left[\frac{2(B\gamma)^{1/2}}{1 + (B\gamma)^{1/2}} - 1 \right] a_{00},$$

$$a_{22} = \left\{ \frac{6(B\gamma)^{1/2}}{[1 + (B\gamma)^{1/2}]^2} - \frac{1}{2} \right\} a_{00},$$

$$a_{24} = \left\{ \frac{5(B\gamma)^{1/2}}{[1 + (B\gamma)^{1/2}]^3} - \frac{6(B\gamma)^{1/2} + 1}{2[1 + (B\gamma)^{1/2}]^2} + \frac{(B\gamma)^{1/2} + 2}{4[1 + (B\gamma)^{1/2}]} - \frac{1}{8} \right\} a_{00},$$

$$a_{40} = \left\{ \frac{12B\gamma}{[1 + (B\gamma)^{1/2}]^2} - \frac{12(B\gamma)^{1/2}}{1 + (B\gamma)^{1/2}} + 3 \right\} a_{00},$$

$$a_{42} = \left\{ \frac{60(B\gamma)}{[1 + (B\gamma)^{1/2}]^3} - \frac{6(B\gamma)^{1/2}[6 + (B\gamma)^{1/2}]}{[1 + (B\gamma)^{1/2}]^2} + \frac{6(B\gamma)^{1/2} + 3}{1 + (B\gamma)^{1/2}} - \frac{3}{2} \right\} a_{00},$$

$$a_{44} = \left\{ \frac{70(B\gamma)}{[1 + (B\gamma)^{1/2}]^4} + \frac{3[1 - 8(B\gamma)^{1/2} + (B\gamma)]}{2[1 + (B\gamma)^{1/2}]^2} - \frac{9}{8} \right\} a_{00}.$$

2 拉普拉斯反变化的解

$$\text{记 } \chi = t_0(B\gamma)^{1/4},$$

$$P(\xi) = \begin{cases} 0 & t' < \xi \\ (B\gamma)^{-1/4}(t' - \xi), & t' > \xi, \end{cases}$$

$$Q(\xi) = \begin{cases} 0 & t' < \xi \\ (B\gamma)^{-1/4} \left[\frac{2(t' - \xi)}{x'} \right]^{1/2} J_1[\sqrt{2x'(t' - \xi)}] & t' > \xi. \end{cases}$$

文中解的表达式可写为

$$T_0 = b_1[P(x') - 2P(x' + \chi)] + b_4\{P[(B\gamma)^{1/2}x'] - 2P[(B\gamma)^{1/2}x' + \chi]\} + b_2\{P[x' + (B\gamma)^{1/2}x'] - 2P[x' + (B\gamma)^{1/2}x' + \chi]\} + b_3[(B\gamma)^{-1/4}t' - 2P(\chi)], \quad (1)$$

$$\tilde{u}_0 = b_5[P(x') - 2P(x' + \chi)] + b_8\{P[(B\gamma)^{1/2}x'] - 2P[(B\gamma)^{1/2}x' + \chi]\} + b_6\{P[x' + (B\gamma)^{1/2}x'] - 2P[x' + (B\gamma)^{1/2}x' + \chi]\} + b_7[(B\gamma)^{-1/4}t' - 2P(\chi)], \quad (2)$$

$$\tilde{T}_2 = b_9[Q(7x') - 2Q(\chi + 7x')] + b_{10}[(B\gamma)^{-1/4}t' - 2P(\chi)], \quad (3)$$

$$\bar{u}_2 = b_{11}[Q(7x') - 2Q(x + 7x')] + b_{12}[(B\gamma)^{-1/4}t' - 2P(x)], \quad (4)$$

$$\bar{v}_4 = b_{13}[Q(7x') - 2Q(x + 7x')] + b_{14}[Q(7x') - 2Q(x + 11x')] + b_{15}[(B\gamma)^{-1/4}t' - 2P(x)], \quad (5)$$

$$\bar{u}_4 = b_{16}[Q(7x') - 2Q(x + 7x')] + b_{17}[Q(7x') - 2Q(x + 11x')] + b_{18}[(B\gamma)^{-1/4}t' - 2P(x)], \quad (6)$$

其中系数

$$b_1 = -\frac{1}{6}B^*F(B\gamma)^{1/4}(5a_{00} - 2a_{02}) + \frac{1}{36}A^*F(B\gamma)^{1/2}(-a_{00} + 2a_{02} - 2a_{22} + a_{20}),$$

$$b_2 = -\frac{5FA^*(B\gamma)^{1/2}a_{00}}{12(B\gamma)^{1/2} - 1},$$

$$b_3 = \frac{F}{36}A^*(B\gamma)^{1/2}(5a_{00} - 5a_{20} + 2a_{02} - 2a_{22}) + \frac{1}{6}B^*(B\gamma)^{1/4}F(a_{00} + 2a_{02}),$$

$$b_4 = \frac{5A^*(B\gamma)^{1/2}Fa_{00}}{12(B\gamma)^{1/2} - 1},$$

$$b_5 = -\frac{1}{6}B^*F(B\gamma)^{1/4}(5a_{00} - 2a_{02}) + \frac{1}{36}A^*F(B\gamma)^{1/2}(-a_{00} + 2a_{02} - 2a_{22} + a_{20}),$$

$$b_6 = -\frac{5FA^*(B\gamma)^{1/2}a_{00}}{12(B\gamma)^{1/2} - 1},$$

$$b_7 = \frac{1}{6}B^*(B\gamma)^{1/4}F(5a_{00} - 2a_{02}) + \frac{F}{36}A^*(B\gamma)^{1/2}(a_{00} - a_{20} - 2a_{02} + 2a_{22}),$$

$$b_8 = \frac{5A^*(B\gamma)^{1/2}Fa_{00}}{12(B\gamma)^{1/2} - 1},$$

$$b_9 = \frac{F}{42}B^*(B\gamma)^{1/4}(19a_{02} - 7a_{00} - 36a_{04}) + \frac{F}{252}A^*(B\gamma)^{1/2}(7a_{00} - 5a_{02} + 5a_{22} - 7a_{20} + 36a_{24} - 36a_{04}),$$

$$b_{10} = \frac{1}{42}B^*F(B\gamma)^{1/4}(36a_{04} - 5a_{02} - 7a_{00}) + \frac{A^*(B\gamma)^{1/2}F}{252}(19a_{02} - 19a_{22} + 7a_{00} - 7a_{20} + 36a_{04} - 36a_{24}),$$

$$b_{11} = -\left[\frac{F}{42}B^*(B\gamma)^{1/4}(19a_{02} - 7a_{00} - 36a_{04}) - \frac{F}{252}A^*(B\gamma)^{1/2}(7a_{00} - 5a_{02} + 5a_{22} - 7a_{20} + 36a_{24} - 36a_{04})\right],$$

$$b_{12} = \frac{1}{42}B^*F(B\gamma)^{1/4}(19a_{02} - 7a_{00} - 36a_{04}) + \frac{A^*(B\gamma)^{1/2}F}{252}(-5a_{02} + 7a_{00} + 5a_{22} - 7a_{20} + 36a_{24} - 36a_{04}),$$

$$b_{13} = \frac{1}{126}B^*F(B\gamma)^{1/4}(-7a_{00} + 19a_{02} + 36a_{04}) + \frac{1}{756}A^*F(B\gamma)^{1/2}(7a_{00} - 5a_{02} + 5a_{22} - 7a_{20} + 36a_{24} - 36a_{04}),$$

$$b_{14} = \frac{1}{1386} B^* F(B\gamma)^{1/4} (-77a_{00} + 110a_{02} - 1890a_{06} + 279a_{04}) + \frac{F}{8316} A^* (B\gamma)^{1/2} (77a_{00} + 44a_{02} - 44a_{22} - 77a_{20} + 1890a_{26} + 477a_{24} - 1890a_{06} - 477a_{04}),$$

$$b_{15} = \frac{1}{154} B^* F(B\gamma)^{1/4} (-9a_{04} - 11a_{02} + 210a_{06}) + \frac{A^* (B\gamma)^{1/2} F}{924} (75a_{04} + 11a_{02} - 75a_{24} - 11a_{22} + 210a_{06} - 210a_{26}),$$

$$b_{16} = \frac{1}{126} B^* F(B\gamma)^{1/4} (-7a_{00} + 19a_{02} - 36a_{04}) + \frac{1}{756} A^* F(B\gamma)^{1/2} (7a_{00} - 5a_{02} + 5a_{22} - 7a_{20} + 36a_{24} - 36a_{04}),$$

$$b_{17} = - \left[\frac{1}{1386} B^* F(B\gamma)^{1/4} (-77a_{00} + 11a_{02}) - 1890a_{06} + 279a_{04} + \frac{1}{8316} A^* F(B\gamma)^{1/2} (77a_{00} + 44a_{02} - 44a_{22} - 77a_{20} + 1890a_{26} + 477a_{24} - 1890a_{06} - 477a_{04}) \right],$$

$$b_{18} = \frac{1}{154} B^* F(B\gamma)^{1/4} (75a_{04} - 11a_{02} - 210a_{06}) + \frac{A^* (B\gamma)^{1/2} F}{924} (210a_{26} + 9a_{24} - 210a_{06} - 9a_{04} + 11a_{02} - 11a_{22}).$$