

用线性规划法求解克立格估值权系数的研究

胡小荣, 俞茂宏

(西安交通大学建筑工程与力学学院, 西安 710049)

[摘要] 基于线性规划原理, 针对各种克立格法提出了相应的能考虑到权值非负约束的求解权系数的线性规划方法。用该方法求解估值权系数具有以下优点: (1) 与克立格方程组法相比, 可考虑到估值权系数的非负约束条件; (2) 与二次规划法相比, 不仅计算原理比较简单, 而且还可大大减少计算工作量, 具有实用价值。

[关键词] 线性规划 克立格法 估值权系数 非负约束

[中图分类号] P628 [文献标识码] A [文章编号] 0495 - 5331(2001)03 - 0053 - 05

0 前言

克立格法作为一种可对区域化变量求最优、线性、无偏内插估计值的方法在线性地质统计学中占有重要地位。目前, 各种克立格法中的估值权系数都是通过求解与之相应的克立格方程组来获得^[1]。然而, 在用克立格方程组计算估值权系数时, 由于未对权的符号附加任何限制, 这样便使得由克立格方程组计算出的权值常常出现负值。负值的存在有以下弊端^[2,3]: (1) 负权无任何物理意义; (2) 负权可能导致得出负的估计值, 而负的估计值在实际应用中通常毫无意义; (3) 负值的存在可能使估计值奇异; (4) 负权会引起估值的高度不稳定。因此, 在实际应用中, 有必要考虑对估值权系数作非负要求。如果考虑到权值的非负约束, 则在计算估值权系数时就不能仅靠求解克立格方程组来实现, 而是需要求解相应的二次规划问题。然而, 由于二次规划在求解过程中计算工作量十分庞大, 需要占用大量机时, 实用性差。即使是普通克立格法这样一个最简单、最基本的问题, 采用二次规划求解权系数也是一件很困难的事, 这从 Barnes 和 Johnson 针对普通克立格法所提出的一种基于 Kuhn - Tucker 条件的正克立格算法就可见一斑^[2]。至于相对普通克立格法而言更为复杂的泛克立格法、协同克立格法等, 目前尚未有人提出过相应的能有效解决权值非负约束的求解办法。为此, 本文基于线性规划原理针对各种克立格法提出了相应的能考虑到权值非负约束的求解权系数的线性规划方法。用线性规划方法求解估值权系数具有以下优点: (1) 与克立格方程组法相比, 可考虑到估值权系数的非负约束条件; (2) 与二次规划法相比, 不仅计算原理比较简单, 而且还可大大减少计算工作量, 具有实用价值。

1 方法原理

用线性规划法求解克立格估值权系数的基本思路是: 由于采用求解克立格方程组的方法不能保证所有权值均能满足非负要求, 而按二次规划问题求解又十分繁杂、计算工作量大。因此, 一个折衷的方法是在保证所有权值满足非负条件及估值无偏这两个前提下尽可能使估值满足最优性条件。由于克立格方程组所求出的估值权系数能够使估值达到最优, 因此, 可以认为要使估值尽可能最优就相当于要使估值权系数尽可能满足克立格方程组。这样就可将在各种克立格法中通过求解克立格方程组获得估值权系数的问题转化成相应的能考虑到估值权系数非负要求的线性规划问题。基于上述思想, 本文分别对普通克立格法、泛克立格法、协同克立格法、指示克立格法中有关权系数的求法作了分析探讨。

1.1 普通克立格法

在不考虑估值权系数非负约束的条件下, 普通克立格法是通过求解如下一个普通克立格方程组来获得权系数的

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (X_i, X) + \mu = (X, X) \\ \mu_i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mu_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — 估值权系数。若要考虑到权系数的非负性, 令

$$t_i = \left| (X_i, X) - \sum_{j=1}^n (X_j, X) - \mu_j \right| \quad (2)$$

$$\mu_i = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{且} \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0 \quad (3)$$

这样, 求解(1)式这个普通克立格方程组的问题就可转化成如下的一个线性规划问题:

$$\begin{aligned}
 \min S &= \sum_{i=1}^n t \\
 \text{s.t. } t &= \sum_{i=1}^n (X, X) - \sum_{i=1}^n (X, X) - \mu_1 + \mu_2 \\
 t &- \{ \sum_{i=1}^n (X, X) - \sum_{i=1}^n (X, X) - \mu_1 + \mu_2 \} \\
 &= 1 \\
 &= 0 \\
 t &= 0 \\
 \mu_1 &= 0 \\
 \mu_2 &= 0 \\
 (i &= 1, 2, \dots, n)。
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

进一步可将上式写成：

$$\begin{aligned}
 \min S &= \sum_{i=1}^n t \\
 \text{s.t. } t &+ \sum_{i=1}^n (X, X) + \mu_1 - \mu_2 = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 -t &+ \sum_{i=1}^n (X, X) + \mu_1 - \mu_2 = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 &= 1 \\
 &= 0 \\
 t &= 0 \\
 \mu_1 &= 0 \\
 \mu_2 &= 0 \\
 (i &= 1, 2, \dots, n)。
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

利用(5)这样一个线性规划求出的估值权系数就可满足非负要求并且能使估值尽可能达到最优。

1.2 泛克立格法

1.2.1 区域化变量的泛克立格估值

在不考虑估值权系数非负约束的条件下,区域化变量的泛克立格估值是通过求解如下一个泛克立格方程组来获得权系数的

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^n (X, X) + \sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 (\quad = 1, 2, \dots, n) \\
 f_l(X) = f_l(X) \quad (l = 1, 2, \dots, K)
 \end{cases}
 \tag{6}$$

式中, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 为估值权系数。若要考虑到估值权系数的非负性,令

$$\begin{aligned}
 t &= \left| \sum_{i=1}^n (X, X) - \sum_{i=1}^n (X, X) - \sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) \right| \\
 \mu_l &= \mu_l - \mu_l, \mu_l \geq 0, \mu_l \geq 0 \\
 (l &= 1, 2, \dots, K)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

则求解(6)式这样一个泛克立格方程组的问题就可

转化成如下的一个线性规划问题：

$$\begin{aligned}
 \min S &= \sum_{i=1}^n t \\
 \text{s.t. } t &= \sum_{i=1}^n (X, X) - \sum_{i=1}^n (X, X) - \\
 &\sum_{l=1}^K (\mu_l - \mu_l) f_l(X) \\
 t &- \{ \sum_{i=1}^n (X, X) - \sum_{i=1}^n (X, X) - \\
 &\sum_{l=1}^K (\mu_l - \mu_l) f_l(X) \} \\
 &= 1 \\
 &= 0 \\
 t &= 0 \\
 \mu_l &= 0 \\
 \mu_l &= 0 \\
 (i &= 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, K)。
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

(9)式又可写成：

$$\begin{aligned}
 \min S &= \sum_{i=1}^n t \\
 \text{s.t. } t &+ \sum_{i=1}^n (X, X) + \sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 &\sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 -t &+ \sum_{i=1}^n (X, X) + \sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 &\sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) = \sum_{i=1}^n (X, X) \\
 &= 1 \\
 &= 0 \\
 t &= 0 \\
 \mu_l &= 0 \\
 \mu_l &= 0 \\
 (i &= 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, K)。
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

1.2.2 漂移的泛克立格估值

在不考虑估值权系数非负约束的条件下,漂移的泛克立格估值是通过求解如下一个泛克立格方程组来获得权系数的：

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^n (X, X) + \sum_{l=1}^K \mu_l f_l(X) = 0 \\
 (\quad = 1, 2, \dots, n) \\
 f_l(X) = f_l(X) \\
 (l = 1, 2, \dots, K)
 \end{cases}
 \tag{11}$$

式中, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 为估值权系数。若要考虑到权系数的非负性,同理,可将(11)式这样一个求解泛克立格方程组的问题转化成如下的一个线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min S &= \sum_{i=1}^n t_i \\ \text{s.t. } t_i &+ \sum_{l=1}^n (G_{il}(X, X) + \sum_{l=1}^K \mu_l f_{il}(X)) - \sum_{l=1}^K \mu_l f_{il}(X) = 0 \\ -t_i &+ \sum_{l=1}^n (G_{il}(X, X) + \sum_{l=1}^K \mu_l f_{il}(X)) - \sum_{l=1}^K \mu_l f_{il}(X) = 0 \\ f_i(X) &= f_l(X) \\ t_i &\geq 0 \\ \mu_l &\geq 0 \\ \mu_l &\geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$(i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, K)$

1.3 协同克立格法

在不考虑估值权系数非负约束的条件下,协同克立格法是通过求解如下一个协同克立格方程组来获得权系数的:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n G(X, X) + \mu = G(X, X) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \mu = I \end{cases} \quad (13)$$

其中,

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1K} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{K1} & g_{K2} & \dots & g_{KK} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

其中 $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_K \end{pmatrix}$ $\mu_1 = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1K} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{K1} & \mu_{K2} & \dots & \mu_{KK} \end{pmatrix}$ $\mu_2 = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1K} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{K1} & \mu_{K2} & \dots & \mu_{KK} \end{pmatrix}$

1.4 协同泛克立格法

在不考虑估值权系数非负约束的条件下,协同泛克立格法是通过求解如下一个协同泛克立格方程组来获得权系数的。

为估值权系数, $\mu, G(X, X), G(X, X)$ 为

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1K} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{K1} & \mu_{K2} & \dots & \mu_{KK} \end{pmatrix}$$

$G(X, X) =$

$$\begin{pmatrix} g_{11}(X, X) & g_{12}(X, X) & \dots & g_{1K}(X, X) \\ g_{21}(X, X) & g_{22}(X, X) & \dots & g_{2K}(X, X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{K1}(X, X) & g_{K2}(X, X) & \dots & g_{KK}(X, X) \end{pmatrix}$$

$G(X, X) =$

$$\begin{pmatrix} g_{11}(X, X) & g_{12}(X, X) & \dots & g_{1K}(X, X) \\ g_{21}(X, X) & g_{22}(X, X) & \dots & g_{2K}(X, X) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{K1}(X, X) & g_{K2}(X, X) & \dots & g_{KK}(X, X) \end{pmatrix}$$

I 为 K 阶单位矩阵。

若要考虑到估值权系数的非负性,同理,可将求解(13)式这样一个协同克立格方程组的问题转化成如下的一个线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min S &= \sum_{i=1}^n T_i / T \\ \text{s.t. } T &+ \sum_{i=1}^n G(X, X) + \mu_1 - \mu_2 = G(X, X) \\ -T &+ \sum_{i=1}^n G(X, X) + \mu_1 - \mu_2 = G(X, X) \\ \mu &= I \\ T, \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n G(X, X) + \sum_{l=1}^K F_l(X) \mu_l = G(X, X) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ F_1(X) = F_l(X) \\ \mu_l \geq 0 \quad (l = 1, 2, \dots, K) \end{cases} \quad (15)$$

其中, $G(X, X)$ 、 μ 、 $G(X, X)$ 意义同前;
 $F_l(X) = f_l(X) \cdot I$, I 为 K 阶单位矩阵。若要考虑

到估值权系数的非负性,同理,可将求解(15)式这样一个协同泛克立格方程组的问题转化成如下的一个线性规划问题:

$$\begin{aligned}
 \min S &= \sum_{i=1}^n T_i [T_i] \\
 \text{s.t. } T &+ \sum_{i=1}^n G(X, X_i) + \sum_{l=1}^K F_l(X) \mu_l - \sum_{l=1}^K F_l(X) \mu_l = G(X, X) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 -T &+ \sum_{i=1}^n G(X, X_i) + \sum_{l=1}^K F_l(X) \mu_l - \sum_{l=1}^K F_l(X) \mu_l = G(X, X) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 \sum_{i=1}^n F_l(X) (X) &= F(X) \quad (l = 1, 2, \dots, K) \\
 0 &\leq T_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 T &\geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 \mu_l &\geq 0 \quad (l = 1, 2, \dots, K) \\
 \mu_l &\geq 0 \quad (l = 1, 2, \dots, K)
 \end{aligned} \tag{16}$$

式中各符号与前同。

1.5 指示克立格法

在不考虑估值权系数非负约束的条件下,指示克立格法是通过求解如下一个指示克立格方程组来获得权系数的。

$$\begin{cases}
 \sum_{i=1}^n (Z_i) \cdot f_i(X, X; Z) + \mu = \\
 f_i(X, A, Z) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 \sum_{i=1}^n (Z_i) = 1
 \end{cases} \tag{17}$$

式中, $(Z_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为估值权系数。若要考虑到权值的非负性,可将求解(17)式这样一个指示克立格方程组的问题转化成如下的一个线性规划问题。

$$\begin{aligned}
 \min S &= \sum_{i=1}^n t_i (Z_i) \\
 \text{s.t. } t &+ \sum_{i=1}^n (Z_i) \cdot f_i(X, X; Z) + \\
 &\quad \mu_1 - \mu_2 = f_i(X, A; Z) \\
 -t &+ \sum_{i=1}^n (Z_i) \cdot f_i(X, X; Z) + \\
 &\quad \mu_1 - \mu_2 = f_i(X, A; Z) \\
 \sum_{i=1}^n (Z_i) &= 1 \\
 (Z_i) &\geq 0 \\
 t &\geq 0 \\
 \mu_1, \mu_2 &\geq 0 \\
 (i &= 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned} \tag{18}$$

2 算例

为验证所提算法的可行性,现分别用求解普通克立格方程组的方法和所提线性规划方法对以下两

个算例进行计算并加以对照比较。

1) 算例 1: 设有一平面空间变异几何域,假定区域化变量 Z 在 S_0 上满足二阶平稳条件且其变异函数为如下各向同性球状模型。

$$(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ 2 + 22 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{200} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{200^3} \right) & 0 < h \leq 200 \\ 22 & h > 200 \end{cases}$$

若在 S_0 内 S_1, S_2, S_3, S_4 等处取有样品,其样品信息值分别为 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , 如图 1(a) 所示。 Z 在 S_0 点处的估计值为 $Z_0^* = \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \mu_3 Z_3 + \mu_4 Z_4$ 。用求解普通克立格方程组的方法求 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 时,其值分别为: $\mu_1 = 0.5181, \mu_2 = 0.0220, \mu_3 = 0.0886, \mu_4 = 0.3712$; 用线性规划求解时,其值分别为: $\mu_1 = 0.5181, \mu_2 = 0.0220, \mu_3 = 0.0886, \mu_4 = 0.3712$ 。由此可知,若两种方法所求权值均满足非负条件,则计算结果相同。因此,线性规划方法包含了克立格方程组方法。然而,若用普通克立格方程组求出的权值并非全部非负,则采用线性规划方法可取得满意效果,如算例 2 所示。

2) 算例 2: 若在算例 1 中的平面变异几何域内 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9$ 等处取有样品,其信息值分别为 $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8, Z_9$, 如图 1(b) 所示。在 S_0 点 $Z_0^* = \mu_1 Z_1 + \mu_2 Z_2 + \mu_3 Z_3 + \mu_4 Z_4 + \mu_5 Z_5 + \mu_6 Z_6 + \mu_7 Z_7 + \mu_8 Z_8 + \mu_9 Z_9$ 。用求解普通克立格方程组的方法求解时,其值分别为: $\mu_1 = 0.4914, \mu_2 = 0.3359, \mu_3 = 0.1954, \mu_4 = 0.0521, \mu_5 = 0.0117, \mu_6 = 0.0277, \mu_7 = -0.0330, \mu_8 = -0.0603, \mu_9$

$= -0.0212$ 。用线性规划求解时,其值分别为: $\omega_1 = 0, \omega_6 = 0, \omega_7 = 0, \omega_8 = 0.0027, \omega_9 = 0.4705, \omega_2 = 0.3315, \omega_3 = 0.1673, \omega_4 = 0.0350, \omega_5 =$

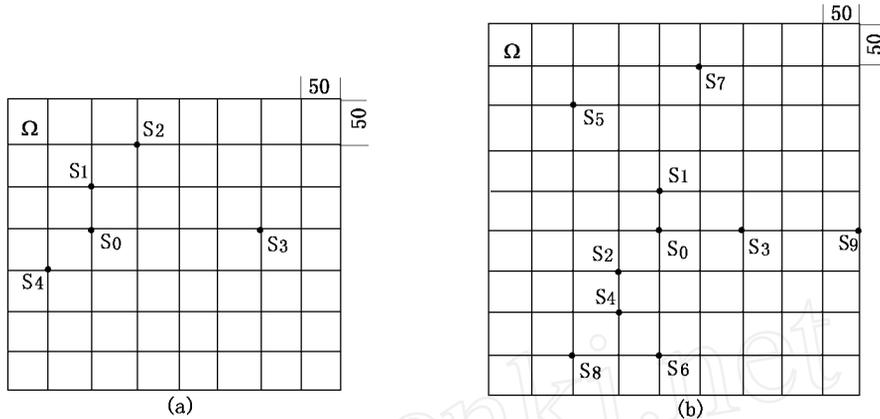


图1 样品位置图

3 结论

本文所提出用线性规划法求解克立格估值权系数的方法有以下特点:

- 1) 考虑了权值的非负约束;
- 2) 算例计算表明,当用克立格方程组计算出的权值均满足非负条件时,线性规划法与克立格方程组法具有相同的计算结果,这说明线性规划法包含了克立格方程组法;

3) 线性规划法与二次规划法相比计算原理简单、计算速度更快、计算工作量要小得多、具有实用性。

[参考文献]

- [1] Journel A G, Huijbregts CH J. Mining geostatistics [M]. London: Academic Press, 1978.
- [2] 侯景儒, 黄竟先. 地质统计学的理论与方法 [M]. 北京: 地质出版社, 1990. 116 ~ 125.
- [3] Herxfeld U C. A note on program performing kriging with nonnegative weights [J]. Mathematical Geology, 1989, 21 (3) : 391 ~ 392.

DETERMINATION OF WEIGHTS OF KRIGINGS BY LINEAR PROGRAMMING METHOD

HU Xiao - rong, YU Mao - hong

The linear programming (LP) method is proposed to obtain the Kriging weights based on the linear programming principle in which the weights with nonnegative can be treated as constrains. This method has such advantages as (1) the nonnegative property of weights being accounted for compared with the Kriging equations method (2) simple calculation principle, reduced work amount and more practical use compared with quadratic programming method.

Key words: linear programming, kriging weights, nonnegative constrains



[第一作者简介]

胡小荣(1964年-),男,1984年毕业于重庆大学采矿工程系采矿工程专业,获学士学位,1988年获东北工学院硕士学位,2000年获东北大学博士学位,现为西安交通大学博士后并任本溪冶金高等专科学校资建系副教授,主要从事采矿工程及岩石力学的教学及科研工作。

通讯地址:陕西省西安市 西安交通大学建筑工程与力学学院 邮政编码:710049