

移动荷载作用下 Kerr 地基梁稳态响应解答^①

黄 强^{1,2}, 黄宏伟^{1,2}, 张冬梅^{1,2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 研究 Kerr 地基上的均质 Euler-Bernoulli 梁在移动集中荷载作用下的稳态响应, 分析有无阻尼存在时列车速度、地基压缩刚度、剪切刚度对 Kerr 地基梁挠度曲线的影响。计算结果表明, 地基阻尼的存在能明显减少移动荷载引起的地基梁挠度, 地基梁的挠度受地基压缩刚度的影响比剪切刚度更为明显。

关键词: 移动荷载; Kerr 地基; 地基阻尼; 挠度

中图分类号: TU348, TU471.2

文献标志码: A

文章编号: 1000-0844(2015)增刊 1-0040-06

DOI: 10.3969/j.issn.1000-0844.2015.01.0563

Steady-state Response Solution of a Kerr Foundation Beam under Moving Loads

HUANG Qiang^{1,2}, HUANG Hong-wei^{1,2}, ZHANG Dong-mei^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering (Tongji University), Ministry of Education, Shanghai 200092, China)

Abstract: The steady-state response of an Euler-Bernoulli beam placed on a Kerr foundation and subjected to a concentrated load moving with a constant speed has been investigated. A steady-state response solution of the Kerr foundation beam was derived and the influence of train velocity, compression stiffness, and shear stiffness of the foundation beam on the dynamic response were analyzed considering possible foundation damping. The results illustrated that foundation damping can significantly reduce deflection of a foundation beam, and compression stiffness has more effect on deflection than the shear stiffness.

Key words: moving load; Kerr foundation; foundation damping; deflection

0 引言

列车在轨道上运行引起的动力响应问题可以简化为一维方向上的地基梁在移动荷载作用下的地基梁稳态响应问题。以往的研究中, 地基模型较多使用的是 Winkler 地基和 Pasternak^[1] 地基、Vlasov^[2] 地基, 地基梁则一般选择 Euler-Bernoulli 梁或 Timoshenko 梁, 而荷载则以移动常载和剪谐荷载为主。文献[3~6]研究了不同地基类型、梁形式以及荷载形式组合下地基梁的稳态响应理论解答, 对欠阻尼、临界阻尼以及过阻尼情况的响应规律进行

了比较。Maheshwari 等^[7] 分析了碎石桩加固地基上作用移动荷载时的动力响应规律, 土体采用 Kelvin 地基模型, 碎石桩简化为 Winkler 弹簧, 表层土石填层简化为 Pasternak 剪切层。

从已有的研究结果来看, 研究移动荷载引起的地基梁动力响应一般都要考虑地基的黏弹性, 同时考虑到土体的剪切刚度, 所以 Pasternak 地基模型应用得较多, 但更高阶的地基模型则应用很少。一是计算较为复杂, 二是计算的结果难以验证。另一方面, 关于地基梁的选择, Euler-Bernoulli 梁(简称

① 收稿日期: 2015-04-01

基金项目: 国家 973 基础研究项目(2011CB013800); 国家自然科学基金项目(51278381); 上海市优秀学术带头人项目(12XD1405100)

作者简介: 黄 强(1987-), 男, 在读博士研究生. E-mail: qianghuang1987@163.com.

E-B 梁,下同)比 Timoshenko 梁应用更为广泛,主要原因是地基梁在荷载移动方向上近似长梁,其纵向的剪切刚度较之抗弯刚度可以忽略不计,对梁变形计算结果也不产生大的影响。

目前,三参数 Kerr 地基模型^[8]或更高阶地基模型在地基梁动力响应计算中还较为少见。事实上,相比于单参数 Winkler 模型或是双参数 Pasternak 弹性地基模型,Kerr 地基模型不仅能反应土体的压缩和剪切特性,且其解答形式能更好地反映地基非线性变形特性,在某些情况下更具优越性^[9]。由于 Kerr 地基模型参数较多且计算复杂,目前 Kerr 地基梁的稳态响应解答鲜见报道。本文尝试用 Kerr 地基梁模型来研究荷载移动引起的稳态响应规律,指出 Kerr 地基模型的适用性。

1 Kerr 地基梁振动响应方程

本文采用的 Kerr 地基梁模型如图 1 所示,Kerr 地基模型由双层弹簧和一剪切层组成,分别用参数 k_1, k_2, G 来表示土体的压缩和剪切刚度。考虑土体的黏性阻尼时,可用参数 c_2 来表示(这里只考虑阻尼元件加在下层弹簧的情况)。移动荷载作用下的 Kerr 地基梁稳态响应方程为

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t) \quad (1)$$

式中: $w(x, t)$ 是 E-B 梁的挠度; $w_1(x, t)$ 是上层弹簧的变形量; $w_2(x, t)$ 是剪切层的变形量,也是下层弹簧的变形量。

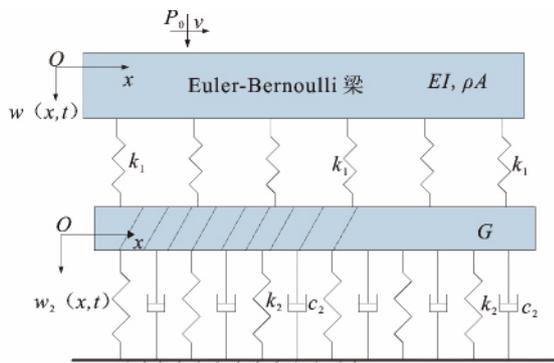


图 1 Kerr 地基梁模型

Fig. 1 Kerr foundation beam model

设 $q_1(x, t), q_2(x, t)$ 分别为地基梁和剪切层所受的力,则有

$$\begin{cases} q_1(x, t) = k_1 w_1 \\ q_2(x, t) = k_2 w_2 + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

故可以得到剪切层的动力平衡方程为

$$k_1 w_1 = k_2 w_2 + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - G \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (3)$$

又地基梁的动力平衡方程为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_1(x, t) D = p_0 \delta(x - vt) D \quad (4)$$

将式(1)、(2)、(3)代入式(4),即可得到 $w_2(x, t)$ 表示的地基梁响应方程:

$$\begin{aligned} EI \left[-\frac{G}{k_1} \frac{\partial^6 w_2}{\partial x^6} + \frac{G}{k_1} \frac{\partial^5 w_2}{\partial x^4 \partial t} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \right] \\ + m_b \left[-\frac{G}{k_1} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{c_2}{k_1} \frac{\partial^3 w_2}{\partial t^3} + \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \right] \\ - k_2 w_2 + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} - G \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = P_0 \delta(x - vt) \end{aligned} \quad (5)$$

式中: EI 为地基梁的抗弯刚度,单位为 $N \cdot m^2$; m_b 是单位长度梁的重量,单位为 kg/m ; P_0 是移动荷载大小,单位为 N ; v 是列车移动速度,单位为 m/s ; k_1, k_2 是土体的压缩刚度,单位为 kN/m ; G 是土体的剪切刚度,单位为 N ; c_2 为地基阻尼,单位为 Ns/m ; D 是地基梁的横向宽度。这里取单位长度,故上述参数都是单位宽度下的数值。

结合式(3)可以得到地基梁的挠度响应表达式为:

$$w(x, t) = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) w_2 + \frac{c_2}{k_1} \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{G}{k_1} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (6)$$

1.1 Kerr 弹性地基梁的稳态响应解答

关于式(5)的解答,这里借鉴文献[3]的处理方法,先求得式(5)齐次方程的解,方程的非齐次项可以看作是地基梁梁上剪力的突然增加,在边界条件中予以反映。

令 $\xi = x - vt, (-\infty \leq \xi \leq +\infty)$,式(5)的齐次偏微分方程简化为如下常微分方程形式:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{d^6 w_2}{d\xi^6} + A_2 \frac{d^5 w_2}{d\xi^5} - A_3 \frac{d^4 w_2}{d\xi^4} + \\ A_4 \frac{d^3 w_2}{d\xi^3} - A_5 \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} + A_6 \frac{dw_2}{d\xi} - k_2 w_2 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中:

$$\begin{cases} A_1 = EI \frac{G}{k_1} \\ A_3 = EI \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) - \frac{G m_b v^2}{k_1} \\ A_5 = m_b \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) v^2 - G \end{cases} \quad \begin{cases} A_2 = v \frac{EI}{k_2} c_2 \\ A_4 = m_b \frac{v^3}{k_1} c_2 \\ A_6 = v c_2 \end{cases} \quad (8)$$

令 $w_2 = e^{m\xi}$, 式(7)化为

$$\begin{aligned} A_1 m^6 + A_2 m^5 - A_3 m^4 + A_4 m^3 - \\ A_5 m^2 + A_6 m - k_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

当不考虑地基的黏性阻尼 ($c_2 = 0$) 时, 图 1 模型即为 Kerr 弹性地基梁的稳态响应问题。此时, 式(9)化为

$$A_1 m^6 - A_3 m^4 - A_5 m^2 - k_2 = 0 \quad (10)$$

于是得到该方程根的形式为

$$\begin{cases} m_{1,2} = \pm p \\ m_{3,4} = M \pm iN \\ m_{5,6} = -M \pm iN \end{cases} \quad (11)$$

其中 p, M, N 都是正数; i 为虚数符号。

故式(7)解的形式为

$$\begin{cases} w_{21} = a_1 e^{p\xi} + e^{M\xi} (a_3 \cos N\xi + a_4 \sin N\xi) \\ (\xi \leq 0) \\ w_{22} = a_2 e^{-p\xi} + e^{-M\xi} (a_5 \cos N\xi + a_6 \sin N\xi) \\ (\xi \geq 0) \end{cases} \quad (12)$$

即得 Kerr 地基梁的挠度表达式为

$$\begin{cases} w_1 = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) w_{21} - \frac{G}{k_1} \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial \xi^2} (\xi \leq 0) \\ w_R = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) w_{22} - \frac{G}{k_1} \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial \xi^2} (\xi \geq 0) \end{cases} \quad (13)$$

式中: w_1 是地基梁左侧挠度响应曲线; w_R 是地基梁右侧挠度曲线。

此外, 地基梁的挠度解析解必须满足如下初始条件和位移边界条件:

$$\begin{cases} w_1(0^-) = w_R(0^+) \\ w'_1(0^-) = w'_R(0^+) \\ w''_1(0^-) = w''_R(0^+) \\ w''_R(0^+) - w''_1(0^-) = \frac{P_0}{EI} \\ w_{21}(0^-) = w_{22}(0^+) \\ w'_{21}(0^-) = w'_{22}(0^+) \end{cases} \quad (14)$$

可以求得式(12)系数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 。

1.2 Kerr 黏弹性地基梁的稳态响应解答

当 $c_2 \neq 0$ 时, 式(9)的解答形式要复杂得多。利用数值方法可得式(9)根的一般形式为

$$\begin{cases} m_1 = p_1 \\ m_2 = -p_2 \\ m_{3,4} = M_1 \pm iN_1 \\ m_{5,6} = M_2 \pm iN_2 \end{cases} \quad (15)$$

故方程(7)解的形式为

$$\begin{cases} w_{21} = a_1 e^{p_1 \xi} + e^{M_1 \xi} (a_3 \cos N_1 \xi + a_4 \sin N_1 \xi) \\ (\xi \leq 0) \\ w_{22} = a_2 e^{-p_2 \xi} + e^{-M_2 \xi} (a_5 \cos N_2 \xi + a_6 \sin N_2 \xi) \\ (\xi \geq 0) \end{cases} \quad (16)$$

即得 Kerr 地基梁的挠度表达式为

$$\begin{cases} w_1 = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) w_{21} - \frac{G}{k_1} \frac{\partial^2 w_{21}}{\partial \xi^2} - \frac{c_2 v}{k_1} \frac{\partial w_{21}}{\partial \xi} \\ (\xi \leq 0) \\ w_R = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) w_{22} - \frac{G}{k_1} \frac{\partial^2 w_{22}}{\partial \xi^2} - \frac{c_2 v}{k_1} \frac{\partial w_{22}}{\partial \xi} \\ (\xi \geq 0) \end{cases} \quad (17)$$

同样, 式(17)必须满足式(14), 从而可以求得式(12)系数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 。

2 Kerr 地基梁稳态响应计算

Kerr 地基梁的稳态响应受地基刚度、列车移动速度、荷载等因素的影响。另外从式(13)和式(17)解答形式来看, 阻尼的存在对 Kerr 地基梁动力响应有较大影响。参照文献[3]的参数取值, 确定 Kerr 地基梁模型的参数取值如下:

$$EI = 1.75 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2, m_b = 25 \text{ kg/m}, k_1 = 16.188 \times 10^6 \text{ N/m}, k_2 = 4.08 \times 10^6 \text{ N/m}, G_0 = 6.67 \times 10^5 \text{ N}, P_0 = 80 \text{ kN}$$

2.1 Kerr 弹性地基梁振动响应

引入挠度放大系数 λ :

$$\lambda(\xi) = \frac{\text{Deflection(dynamic)}}{\text{Maximum Deflection (static)}} \quad (18)$$

可计算出静载下 Kerr 弹性地基的最大挠度值为 9.70 mm。

(1) 列车移动速度的影响

图 2 是不同列车速度下梁的挠度放大曲线。从图中可以看出, 50 m/s、100 m/s、150 m/s 下最大挠度分别是 9.834 mm、9.966 mm、10.227 mm, 增加比例分别是 1.38%、2.74%、5.44%, 故车速增加引起地基梁挠度的增加量很有限。

(2) 剪切刚度 G 的影响

以 $v = 10 \text{ m/s}$ 下的挠度曲线为例(下同), 如图 3 所示, $0.5 G_0, 3G_0$ 和 $6G_0$ 下的挠度值分别是 9.978 mm、9.06 mm 和 8.34 mm, 表明增大地层的剪切刚度可以使荷载中心点的挠度值逐渐减少, 但荷载作用引起的沉陷影响范围逐渐变大。因为增大剪切刚度, 弹簧相对位移不易发生, 从而使得地基沉降槽宽

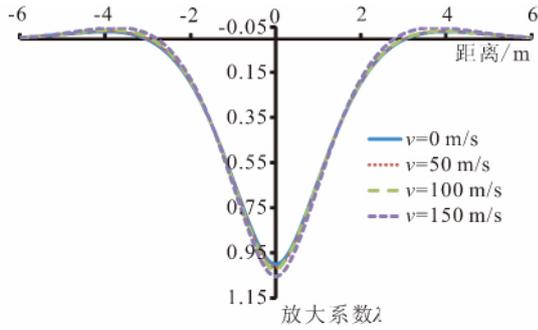


图 2 Kerr 弹性地基梁挠度与速度的关系

Fig. 2 Relationship between velocity and deflection of beam on Kerr elastic foundation

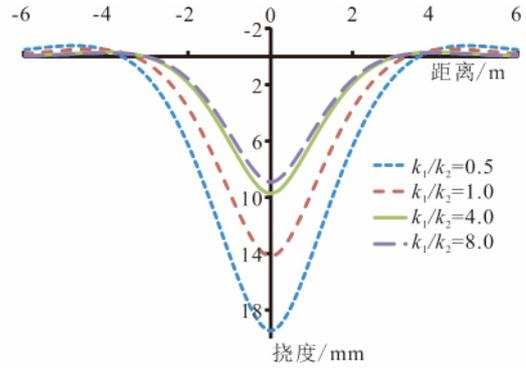


图 4 k2 = 4.08 x 10^6 时的挠度曲线

Fig. 4 Deflection curves (k2 = 4.08 x 10^6)

度变大。

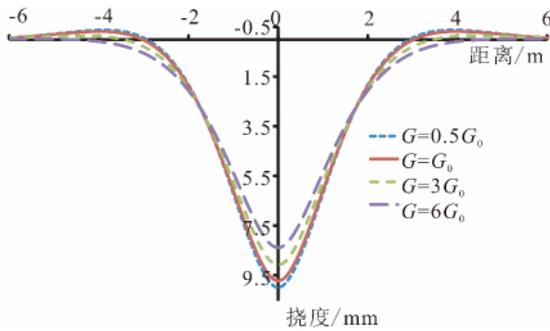


图 3 不同 G 值下梁的挠度曲线

Fig. 3 Deflection curve of beam with different values of G

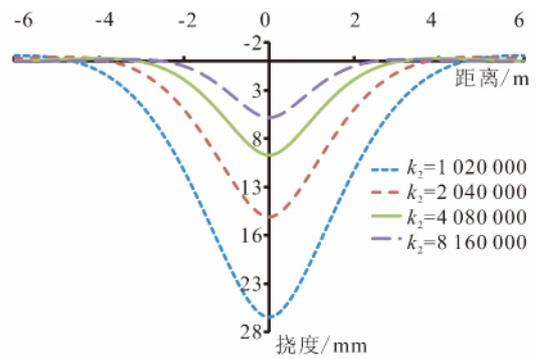


图 5 k1/k2 = 4 时各挠度曲线

Fig. 5 Deflection curves when k1/k2 = 4.0

(3) 地基压缩刚度的影响

Kerr 模型中采用两个压缩刚度系数,这也是 Kerr 地基模型的优势。考虑两种情况:一种是下层弹簧刚度 k2 相同,但刚度比 k1/k2 不同;另一种是压缩刚度比 k1/k2 相同,k2 不同。两者的计算结果分别见图 4 和图 5。

图 4 表明,随着 k1/k2 比例的增加,地基梁的最大挠度会快速减少,且地基沉陷范围也会不断缩小,但挠度减少量随着 k1/k2 增大逐渐减缓。此时增大 k1 并不能显著减少地基梁的挠度,要同时增大 k2 值才能起到进一步减少地基沉陷的效果。图 5 表明,当 k1/k2 一定时,增大 k2 必定会导致地基梁挠度的减小和地基沉陷范围的缩小,这也是符合实际情况的。

3.2 考虑土体阻尼时 Kerr 地基梁振动响应

(1) 不同阻尼下地基梁的稳态响应

图 6 是 v=10 m/s 时不同地基阻尼下地基梁的挠度曲线。随着 c2 的增大,地基梁的最大挠度逐渐减小,最终变为负值。这是因为 c2 不大时,梁的振动处于欠阻尼状态,此时梁的挠度总体为正值;当 c2 很大时,梁的振动变为过阻尼状态,此时梁会发生反弹,且荷载中心后端附近反弹最为厉害。具体临界

阻尼系数的确定是很复杂的,与所用地基梁模型的参数有关,可以通过求解挠度为零时得到,这里不作讨论。

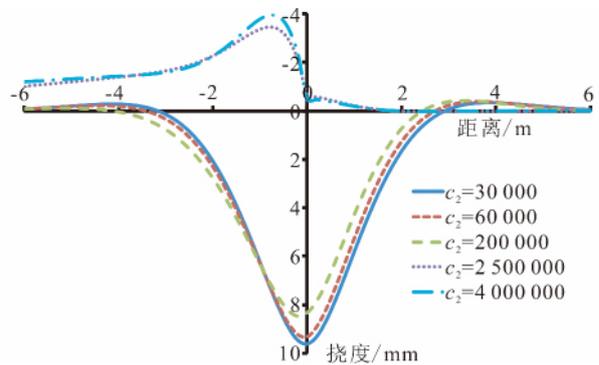


图 6 不同 c2 值下梁的挠度曲线

Fig. 6 Deflection curve of beam with different damping values

(2) 考虑阻尼时地基参数的影响

图 7 是阻尼存在时不同速度下地基梁挠度曲线。和图 2 相比,阻尼的存在使得荷载中心处的挠度值都比静载时候都明显减小,50 m/s、100 m/s、150 m/s 速度下的最大挠度值分别为 8.86 mm、7.44 mm、5.95 mm,下降了 8.6%、23.30%、38.66%。

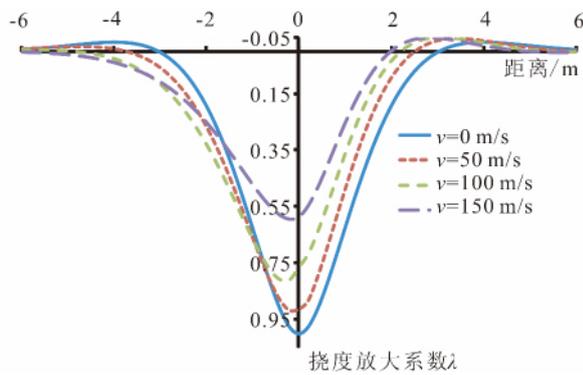


图7 $c_2 = 30\,000\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 时不同速度下的挠度曲线
Fig. 7 Deflection curves at different velocities
($c_2 = 30\,000\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$)

从图8中可以看到,阻尼的存在使地基梁的最大挠度值减小,但减小的幅度除与阻尼本身有关外,还和地基的 k_1/k_2 比值有关。在 k_2 相同时, k_1/k_2 越小,挠度减少的幅度越大,反之则挠度减少幅度越小。

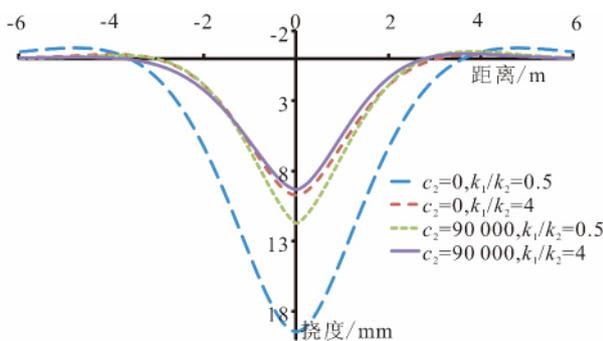


图8 考虑阻尼时压缩刚度影响

Fig. 8 Influence of compressive stiffness considering damping

图9可以看出,阻尼的存在对剪切刚度敏感性的影响不大。在 $G=G_0$ 和 $G=3G_0$ 时, $c_2 = 90\,000\text{ Ns}/\text{m}$ 引起的最大挠度减少量分别是 0.60 mm 和 0.57 mm 。

3 结论

本文对移动荷载作用下 Kerr 地基梁的稳态响应进行了探讨,详细分析了有无地基阻尼时地基梁的振动响应规律,得到的结论如下:

(1) 无阻尼时,列车速度对地基梁挠度曲线的影响都较小,但 Kerr 地基梁的最大挠度随着速度增加有轻微增加趋势;阻尼存在时,梁的最大挠度都随速度的增加而减少;

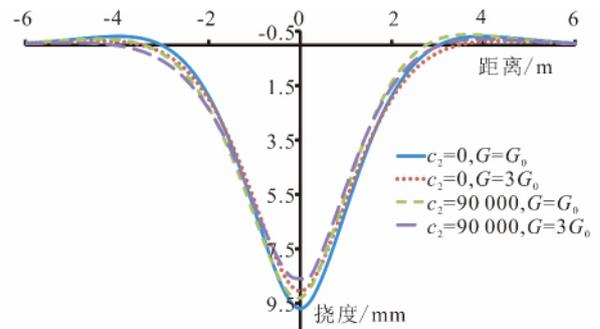


图9 考虑阻尼时剪切刚度影响

Fig. 9 Influence of shear stiffness considering damping

(2) 随着剪切刚度增加, Kerr 地基梁挠度逐渐减小。总体而言,地基剪切刚度对地基梁响应影响不大;

(3) 地基模型的压缩刚度对地基梁的稳态响应影响很大。Kerr 地基模型中,土体压缩刚度的增加可以显著减小梁的挠度值,但较小的幅度还与模型的刚度比有关;

(4) 阻尼的增加会使梁的最大挠度明显减少,同时使得移动荷载两侧位移响应曲线不对称,荷载前进方向上梁的挠度衰减快于后方段,最大挠度点开始向荷载后侧移动。当阻尼过大时,梁的振动进入过阻尼状态,地基梁会发生反弹现象。

参考文献 (References)

- [1] Pasternak P L. Fundamentals of a New Method of Analyzing Structures on an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Moduli[M]. Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Literatury po Stroitel'stvui Arkhitekture, 1954.
- [2] Vlazov V Z, Leotiev U U. Beam, Plates and Shells on Elastic Foundations [M]. Jerusalem: Israel Program for Scientific Transactions, 1966.
- [3] Mallik A K, Chandra S, Singh A B. Steady-state Response of an Elastically Supported Infinite Beam to a Moving Load[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291: 1148-1169.
- [4] Kenney T. Steady-State Vibrations of Beam on Elastic Foundation for Moving Load[J]. Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 1954, 21: 359-364.
- [5] Sun L. A Closed-form Solution of a Bernoulli-Euler Beam on a Viscoelastic Foundation Under Harmonic Loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 242(4): 619-627.
- [6] Kargarnovind M H, Younesian D. Dynamics of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation Under Moving Load[J]. Mechanics Research Communications, 2004, 31: 713-723.
- [7] Mahshwari P, Khatri S. Nonlinear Analysis of Infinite Beams on Granular Bed-stone Column-reinforced Earth Beds Under Moving Loads[J]. Soils and Foundations, 2012, 52(1): 114-125.
- [8] Kerr A D. Elastic and Viscoelastic Foundation Models[J].

Journal of Applied Mechanics, Transactions Asme, 1964; 31
(3):491-498.

[9] 黄棚,黄宏伟,张冬梅.开挖卸荷引起下卧已建盾构隧道的纵向
变形研究[J].岩土工程学报,2012,34(7): 1241-1249.