

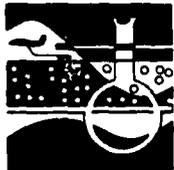
## 区域重力异常高精度实现异常 转换的一个普遍方法

孟昭秦 张工会 陈新贵

(西安地质学院) (新疆地矿局物探队)

应用Шлемилъх级数展开不同类型异常转换的频率特征,可以得到空间域级数求和法进行异常转换的诸系数。对延拓距分别为取数点距0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.3, 1.5, 2.0倍的向下延拓、向上延拓、一阶垂向导数、二阶垂向导数的异常转换,求出了级数求和法的诸系数。从而实现了在原重力异常上一次等距取点求得各种不同的转换异常。通过模型理论计算值和利用上述方法算出的不同高度的延拓值进行对比,发现本法精度较高,可应用于区域重力异常的异常转换中,从而拓宽了重力转换异常的应用。

**关键词:** 重力异常; 异常转换; 频率特征



物探与化探

重力异常的转换问题是重力资料解释的一个经典问题。随着重力异常解释方法的不断改进,转换异常的应用也变得日益广泛并提出了更高的要求。

最近,我们在研究异常的统计解释以及利用最适滤波对异常进行有效划分时,需要较为精确评估的一个参数就是相关半径,而利用不同高度,特别是一个点距以内的不同高度的转换异常来分别评估相关半径,则是解决问题的方法之一。问题的关键是原有的一些异常转换法不能很好地满足我们的需要。

我们知道,实现异常转换的诸方法,大部分是以诺依曼无限平面外部问题或拉格朗日插值原理为数学基础的。一般来说,这些数学原理并没有十分严密地照顾到解的实

质,更为遗憾的是很少见到各种方法本身精度对比方面的资料。在实际异常转换中,我们发现这些方法普遍存在着收敛速度慢、精度低的缺点。另外,这些方法一般都是为小点距的局部测量而设计的,对于区域重力测量中的大点距资料,就很不适应了。为了解决上面的问题,我们发展出了一种精度较高、适于区域重力异常解释的异常转换法。

为使问题尽量得到简化(除二维转换法外),考虑到大部分区域重力测量结果均可以看作是三维平面对称异常(或似对称异常),所以我们以拉斯方程的贝塞尔型解为基础。至于三维平面非对称型异常,贝塞尔型解也可以作为一种极好的近似处理方法。另外为了说明方法本身的精度,我们还对比了延拓结果和模型计算结果在中心剖面上的数据,给出了相对均方差的评估值。

## 方法基本原理

在空间域实现异常转换, 用级数求和法可以表达为

$$f_T(x, y, z) = \sum_{n=-N}^N C_n \overline{f(x+ns, y+ns, 0)} \quad (1)$$

其中  $f_T(x, y, z)$  是转换后的异常,  $\overline{f(x+ns, y+ns, 0)}$  为原异常在距离计算点为  $ns$  处的平均异常, 而  $s$  为取数点之间的距离<sup>[1]</sup>。

为了求出系数  $C_n$  和取数间距  $s$ , Ренбой给出了一个普遍的方法<sup>[2]</sup>。这个方法对二维异常来说只须将异常进行的这种转换的频率特征展成富里埃余弦级数, 而其系数就是实现此种转换在空间域级数求和法的系数。即

$$C_n = a_k$$

$$a_k = \frac{1}{\omega_{ob}} \int_{-\omega_{ob}}^{\omega_{ob}} \Phi(\omega) \cos \frac{k\pi\omega}{\omega_{ob}} d\omega$$

$$k=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

(2) 式中  $\Phi(\omega)$  为异常进行的转换类型的频率特征,  $\omega_{ob}$  为适用于不同精度要求的截止频率。从  $\omega_{ob} = \pi/s$  中我们可以定出不同精度要求的取数间距。

对于三维重力异常, Ренбой法是将此异常进行转换的转换类型的频率特征展成富里埃—贝塞尔级数(零价), 而此零价富里埃—贝塞尔级数的系数就是实现此种转换时空间域级数求和法的系数。即

$$C_n = a_k$$

$$a_k = 2\Phi_1(R_k) / \rho_{ob}^2 J_1^2(\rho_{ob} R_k)$$

$$k=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\Phi_1(R_k) = \int_0^{\rho_{ob}} \rho \Phi(\rho) J_0(\rho R_k) d\rho \quad (4)$$

(3) 式和 (4) 式中的  $J_0(\rho R_k)$ ,  $J_1(\rho R_k)$  分别是零阶和一阶贝塞尔函数,  $\Phi(\rho)$  是异常进行的此种转换类型的频率特征。  $R_k$  则为重力取数圆环的半径值。  $R_k$  值可以从零阶贝塞尔函数的每一个正根定出, 即  $R_k$  是含在方程 (5) 中。

$$J_0(\rho_{ob} R_k) = 0 \quad (5)$$

(5) 式中的  $\rho_{ob}$  为展开时的边界频率。对于不同的精度要求可选出不同的边界频率, 从而利用 (5) 式就可以给出适合于不同精度要求的取数圆环半径值了。

由于贝塞尔函数的零点分布是非等距的, 所以算出的空间域级数求和法的取数间距也是不等距的, 这在上机运算及其实际应用中很不方便, 还得单独设计取数过程。为使取数间距  $s'$  为等距分布, 我们使用和富里埃—贝塞尔级数等价的另一个级数——Шлемильх级数<sup>[3,4]</sup>。即如果我们所进行的异常转换类型的频率特征  $\Phi(\rho)$  在区间  $(0, \rho_{ob})$  内是连续的, 并且存在着一阶导数  $\Phi'(\rho)$  在区间  $0 \leq \rho_{ob} \leq \pi$  内也是连续的, 则此频率特征可以展成下面等价的零价贝塞尔函数

$$\Phi(\rho) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(k\rho)$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \Phi(0) + u \int_0^1 \frac{\Phi'(u\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du \quad (6)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \cos ku \left[ \int_0^1 \frac{\Phi'(u\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du \quad (7)$$

而实现此种异常转换空间域级数求和法(1)式中的系数最终就为

$$C_0 = a_0/2$$

$$C_n = a_k \quad k=1, 2, \dots$$

这时取数间距  $s'$  的分布是等距的, 对于不同类型的异常转换利用上述原理就可以求出不同的一些系数。

## 不同转换类型的系数

### 1. 异常向下延拓, 延拓深度为H

异常进行这类转换时, 转换的频率特征为

$$\Phi(\rho) = e^{H\rho} \quad \text{则} \quad \Phi'(\rho) = He^{H\rho}$$

利用(6)式和(7)式, 我们有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ 1 + uH \int_0^1 \frac{e^{Hu\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du \quad (8)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ uH \cos ku \int_0^1 \frac{e^{Hu\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du \quad (9)$$

在(8)式和(9)式中令  $\xi = \cos\theta$ , 并且考虑到

$$e^{Hu \cos\theta} = I_0(Hu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(Hu) \times \cos n\theta^{[5]} \quad (10)$$

其中  $I_0(Hu), I_n(Hu)$  分别是零阶和  $n$  阶变型贝塞尔函数。所以(8),(9)两式就变为

$$a_0 = 2 + \int_0^\pi uH I_0(Hu) du + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \times \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^\pi Hu I_{2n+1}(Hu) du \quad (11)$$

$$a_k = \int_0^\pi Hu I_0(Hu) \cos kudu + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \times \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^\pi Hu I_{2n+1}(Hu) \cos kudu \quad (12)$$

对于延拓深度分别为取数间距的0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.3, 1.5, 2.0等倍的空间域向下延拓级数求和法的诸系数由表1给出。 $s$ 为取数间距。由表1中可见起主要作用的是前四、五项以内的系数。

级数求和法向下延拓不同深度的系数 ( $C_n$ ) 表

表 1

延拓深度	取 数 点 距 离							
	0	1s	2s	3s	4s	5s	6s	7s
0.3s	2.1396	-1.1127	0.1589	-0.1374	0.0406	-0.0499	0.0181	-0.0255
0.5s	3.6231	-2.8322	0.6529	-0.4096	0.1730	-0.1509	0.0777	-0.0775
0.7s	6.2136	-6.2268	1.9197	-1.0647	0.5328	-0.3999	0.2417	-0.2065
1.0s	14.2259	-17.7377	7.3254	-3.9317	2.2199	-1.5329	1.0265	-0.8003
1.3s	33.1637	-47.1656	23.6670	-13.1570	7.9046	-5.3633	3.7433	-2.8393
1.5s	58.7683	-88.7960	49.0967	-28.2929	17.5158	-11.9138	8.4444	-6.3745
2.0s	250.8491	-416.5897	274.3342	-173.905	114.550	-79.777	58.028	-44.003

### 2. 异常向上延拓, 延拓高度为H

异常进行向上延拓时, 其频率特征为  $\Phi(\rho) = e^{-H\rho}$ , 则  $\Phi'(\rho) = -He^{-H\rho}$  利用(6)式和(7)式, 我们得出

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ 1 - uH \int_0^1 \frac{e^{-Hu\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du \quad (13)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -uH \cos ku \left[ \int_0^1 \frac{e^{-Hu\xi}}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du$$

$$\times d\xi \Big] du \quad (14)$$

在(13)、(14)式中, 令  $\xi = \cos\theta$ , 并且考虑到

$$e^{-Hu \cos\theta} = I_0(-Hu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(-Hu) \cos n\theta$$

其中  $I_0(-Hu), I_n(-Hu)$  分别为零阶和  $n$  阶变型贝塞尔函数。利用变型贝塞尔函数的性质[5]

$$I_0(-uH) = I_0(uH)$$

$$I_{2n+1}(-uH) = -I_{2n+1}(uH)$$

则 (13), (14) 两式分别变为

$$a_0 = 2 - \int_0^\pi uHI_0(uH)du + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

$$\times \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \int_0^\pi HuI_{2n+1}(Hu)du \quad (15)$$

$$a_k = - \int_0^\pi uHI_0(uH)\cos ku + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty}$$

利用 (15), (16) 两式分别算出了延拓高度为取数间距 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.3, 1.5, 2.0 等倍的向上延拓法的系数, 这些系数见表 2。其中  $s$  为取数间距单位。由表 2 可见, 起主要作用的仍是前四项或前五项。

级数求和法向上延拓不同高度的系数 ( $C_n$ ) 表

表 2

延拓高度	取 数 点 距 离							
	0s	1s	2s	3s	4s	5s	6s	7s
0.3s	0.4886	0.3354	0.0524	0.0420	0.0134	0.0127	0.0060	0.0045
0.5s	0.3123	0.3875	0.1029	0.0587	0.0274	0.0217	0.0123	0.0112
0.7s	0.2052	0.3826	0.1444	0.0735	0.0408	0.0279	0.0186	0.0144
1.0s	0.1156	0.3345	0.1827	0.0934	0.0578	0.0373	0.0269	0.0196
1.3s	0.0699	0.2768	0.1967	0.1093	0.0712	0.0463	0.0343	0.0248
1.5s	0.0520	0.2423	0.1971	0.1168	0.0784	0.0517	0.0386	0.0281
2.0s	0.0282	0.1441	0.2162	0.0942	0.1180	0.0402	0.0672	0.0199

### 3. 一阶垂向导数

实现异常的一阶垂向系数转换时, 其频率特征为

$$\Phi(\rho) = \rho \quad \text{则} \quad \Phi'(\rho) = 1$$

利用 (6) 式和 (7) 式, 我们得到

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^\pi u \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right] du = \frac{\pi^2}{2} \quad (17)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos ku \left[ \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] du$$

$$= \frac{1}{k^2} \left[ (-1)^k - 1 \right] \quad (18)$$

利用 (17) 式和 (18) 式算出的计算一阶垂向系数的诸系数见表 3。 $s$  仍为取数间距单位, 起主要作用的仍是前四项。

级数求和法进行一阶垂向导数计算时的系数表

表 3

取值点离计算点距离	0	1s	3s	5s	7s	9s	11s	13s
系数 $C_n$	2.4674	-2.0000	-0.2222	-0.0800	-0.0408	-0.0247	-0.0165	-0.0118

### 4. 垂向二阶导数

实现异常的二阶垂向导数转换时, 其转换的频率特征为

$$\Phi(\rho) = \rho^2 \quad \text{则} \quad \Phi'(\rho) = 2\rho$$

利用 (6) 式和 (7) 式, 我们有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ 0 + u \int_0^1 \frac{2u\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du$$

$$= \frac{4}{3} \pi^2 \quad (19)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u^2 \cos ku \left[ \int_0^1 \frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right] du$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2u^2 \cos ku du = (-1)^k \frac{8}{k^2} \quad (20)$$

利用(19)式,(20)式我们算出了计算二阶垂向导数的诸系数,这些系数见表4。 $s$ 仍为取数间距单位长度。由表4可见起主要作用的亦是前四项。

级数求和法计算二阶垂向导数时的系数表

表 4

取值点离计算点距离	0	1s	2s	3s	4s	5s	6s	7s
系数 $C_n$	6.5797	-8.0000	2.0000	-0.8889	0.5000	-0.3200	0.2222	-0.1633

### 方法的精度评估

考虑到异常中心处的转换异常更具有实际意义,所以我们重点对比了异常向下延拓和向上延拓中心剖面上不同高度的理论模型值和同一模型异常利用上述方法算出的延拓异常值,并对其对比结果进行了相对均方误差计算,从而给出了方法本身的精度评估。

理论模型为多边形截面三维平面对称型,纵截面形态为正六边型。此模型在不同高度处的理论异常均可以由理论公式计算出来,以便进行对比,现将对比结果分述如下。

向下延拓0.3倍点距深度的理论模型异常值和系数计算值在中心剖面处的结果如图1所示,两者极为吻合。其中 $V_z(n), \Delta G(n)$ 分别为理论模型延拓值和系数求和延拓值。其相对均方误差为

$$\sqrt{D(n)} = \sqrt{\sum_{n=0}^{40} [A(n) - A]^2 / 41}$$

$$= 0.0102$$

$$A(n) = |\Delta G(n) - V_z(n)| / V_z(n)$$

$$A = \sum_{n=0}^{40} A(n) / 41$$

向下延拓0.5倍点距深度以及向上延拓0.3倍和0.5倍点距高度的理论模型异常值与参数计算的延拓值在中心剖面处的结果分别由图2~4给出,两者均极为一致。其相对

均方误差分别为0.0125, 0.0098和0.0156。从对比结果可见本法的计算精度较高。

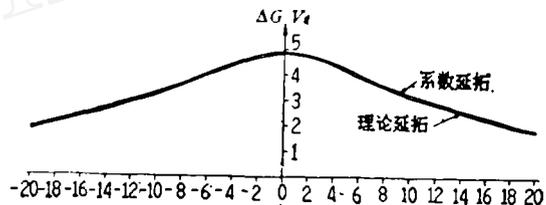


图 1 向下延拓0.3倍点距

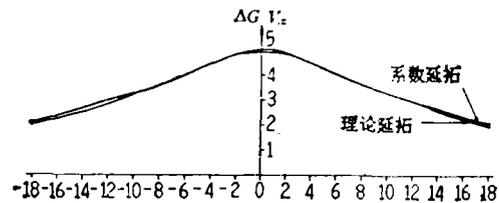


图 2 向下延拓0.5倍点距

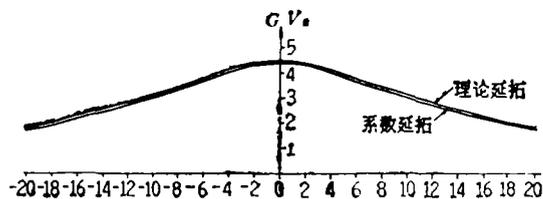


图 3 向上延拓0.3倍点距

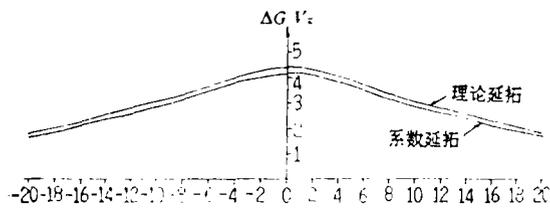


图 4 向上延拓0.5倍点距

### 结 论

通过我们的计算,可见用Шлемилх级数展开不同类型异常转换的频率特征这一普遍方法,可以得出空间域级数求和法进行异常转换等间距取数的各个公式。从方法精度评估的实际对比中,我们发现在满足计算精度不小于8%的前提下,计算的边部损失不

会大于取点距的5倍。为了保证高精度,我们建议将用一个点距以内转换距的逐次转换法,这在计算中是不难实现的。

本项目是地质部科研基金项目中的一部分,得到了部基金委员会的大力支持。承蒙西安地质学院的潘作枢教授审阅全稿,作者在此表示衷心的感谢。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Страхов В. Н., Пучков Е. П., Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, 1971, №8.
- [ 2 ] Гладкий К. В., Серксов С. А., Преобразования Фурье и их приложения в гравиметрии и магнитоработке, М., Изд. МНИИ и ГП им. И.М. Губкина, 1974.
- [ 3 ] Ватсон Г. Н., Теория Бесселевых функций, М., Изд-во, 1949.
- [ 4 ] 刘颖编著,《圆柱函数》,国防工业出版社

## A General Method for High Precision Transformation of Regional Gravity Anomalies

Meng Zhaoqin Zhang Gonghui Chen Xingui

By using the frequency characteristics from the Schlomilch series expansion of different type anomaly transformation, a summation method of series in spatial domain has been developed to determine the coefficients for anomaly transformation. By different anomaly transformation methods, such as downward continuation upward continuation with different station spacings of the continuation distance, the first order vertical derivative and second order vertical derivative, coefficients for series summation method are determined and then the original gravity anomaly at the equal station spacing once taken will be transformed into one of different type. In comparison with the results of modeling and theoretical calculation for same height continuation, the method we introduced has a higher precision and could be used for regional gravity anomaly transformation.

### 1990 年 勘 误

期	页	栏	行	误	正
7	封三	左	倒20	$3.5 \times 10^5 t$	$3.5 \times 10^{15} t$
8	21	左	20	-10.84~10.53	-10.84~-10.53
8	21	右	1	-50.19~50.74	-50.19~-50.74
8	21	右	2	24.94~75.76	24.94~25.76