

# 基于霍顿下渗公式超渗产流计算几个问题的探讨

程银才<sup>1</sup>,王 军<sup>2</sup>,李明华<sup>2</sup>

(1.山东农业大学水利土木工程学院,山东 泰安 271018; 2.山东省泰安市水文局,山东 泰安 271000)

**摘要:**用霍顿下渗公式进行超渗产流计算,用迭代算法根据流域土壤含水量计算相应的下渗能力时发现:当土壤含水量较小时,迭代计算正常;当土壤含水量居中时,易发生迭代震荡现象;当土壤含水量较大时,极易发生迭代计算出错情况。对此,分析了迭代震荡和迭代计算出错的原因;提出了用算术平均法减小迭代震荡的问题;用限制震荡幅度结合算术平均法解决迭代计算出错的问题;同时,推导出了超渗产流模式下流域平均蓄水容量与霍顿下渗公式中三参数间的经验关系式。

**关键词:**霍顿下渗公式;超渗产流;迭代震荡;迭代计算出错

**中图分类号:**P333 **文献标识码:**A **文章编号:**1000-0852(2016)05-0014-03

## 1 问题的提出

对于旱和半干旱流域以及湿润流域的干旱季节,超渗产流是常用的产流模式<sup>[1]</sup>。超渗产流计算中最常用的下渗能力经验公式是霍顿下渗公式<sup>[2]</sup>。以霍顿下渗公式为基础的超渗产流计算过程中,需要两种形式的下渗能力曲线 $f \sim t$ 与 $f \sim W$ ,同时,要根据流域土壤含水量 $W$ 计算相应的下渗能力 $f$ ,这都需要用迭代算法根据 $W$ 计算 $f$ 。迭代计算时,极易发生迭代震荡,即相邻两次计算结果大小悬殊,而多次计算结果总体上来看出现左右摇摆,这一问题的出现,极大地影响了计算的收敛速度。迭代计算中另一问题是,当土壤含水量增大到一定程度时,迭代出错情况很容易出现。针对这两个问题,笔者进行了研究,分析了问题产生的原因,提出了解决问题的方法。同时,推导出了超渗产流模式下流域平均蓄水容量与霍顿下渗公式中三参数间的经验关系式。

## 2 迭代震荡与迭代计算出错的原因分析及其解决方法

下渗经验公式若采用霍顿下渗公式<sup>[3-4]</sup>,其形式为:

$$f=f_c+(f_m-f_c)e^{-kt} \quad (1)$$

式中: $f_m, f_c$ 与 $k$ 为霍顿下渗公式的三参数。按式(1)绘制下渗能力曲线如图1。以此为基础,可确定土壤含水

量与下渗能力之间的关系。设降水开始时刻 $t_0$ 流域某处土壤含水量为 $W_0$ ,相应的下渗能力为 $f_0$ 。由式(1)得

$$f_0=f_c+(f_m-f_c)e^{-kt_0}, \text{ 则:}$$

$$t_0=\frac{1}{k} \ln \frac{f_m-f_c}{f_0-f_c} \quad (2)$$

又 $W_0=\int_0^{t_0} f dt=f_0 t_0+\frac{1}{k}(f_m-f_c)(1-e^{-kt_0})$ ,将式(2)代入该式,有:

$$W_0=\frac{f_c}{k} \ln \frac{f_m-f_c}{f_0-f_c}+\frac{1}{k}(f_m-f_0) \quad (3)$$

在式(3)中,令 $W=W_0, f=f_0$ ,得:

$$f=f_m-kW+f_c \ln \frac{f_m-f_c}{f-f_c} \quad (4)$$

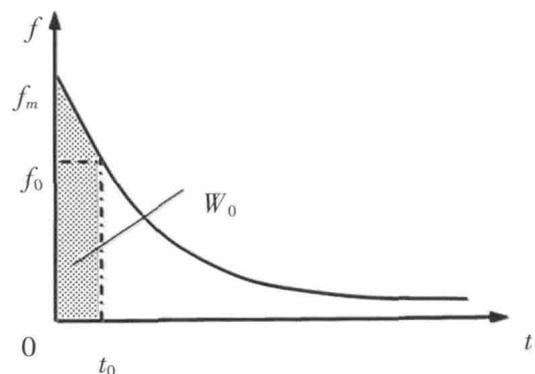


图1 土壤含水量 $W_0$ 与下渗能力 $f_0$ 关系  
Fig.1 The relation between the soil moisture  $W_0$  and infiltration capacity  $f_0$

根据式(4)构造的迭代格式为:

$$f^i = f_m - kW + f_c \ln \frac{f_m - f_c}{f^{i-1} - f_c} \quad (5)$$

由式(5)依据某一计算时段初土壤含水量  $W$  计算相应的下渗能力  $f$  的迭代法: 设定  $f$  的迭代初值  $f^0$ , 由式(5)计算第一次迭代结果  $f^1$ , 再由  $f^1$  经第二次迭代得到  $f^2$ 。依此反复, 直到满足  $|f^i - f^{i+1}| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为事先规定误差限), 停止迭代。

某流域采用霍顿下渗公式中的三参数取值见表 1 第一行。三种典型土壤含水量见表 1 第二行。

表1 根据土壤含水量  $W$  计算相应下渗能力  $f$  的迭代法计算表  
Table1 The iterative algorithm calculation of the corresponding infiltration capacity  $f$  based on the soil moisture  $W$

$f_m/\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$	2.22	$f_c/\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$			0.4		$k/\text{h}^{-1}$			0.04
$W/\text{mm}$	13.0		45.0			51.0				
	2.86	1.58	1.87	1.78	1.81	1.80	1.80	1.80	1.80	
$f/\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$	1.58	0.59	1.32	0.69	1.15	0.78	1.05	0.83	1.00	
	1.34	0.44	1.67	0.32	出错					

按前述的迭代法(迭代初值均取为 0.50mm), 三种土壤含水量计算结果见表 1 第三、第四、第五行。计算结果表明: 土壤含水量为 13.0mm 时, 仅有小幅震荡, 但经 6 次迭代, 结果收敛到 1.80mm。土壤含水量为 45.0mm 时, 计算结果出现较为明显的震荡, 收敛速度很慢。土壤含水量为 51.0mm 时, 经过 2 次大幅震荡后, 迭代计算出错。

针对本例霍顿公式中设置的三个参数取值, 进一步研究表明, 土壤含水量较小(小于 43.0mm)时, 震荡不明显, 且收敛速度较快, 迭代次数不超过 12 次。土壤含水量居中(大于 43.0 小于 48.6mm)时, 震荡明显, 收敛速度较慢, 但不会出现迭代计算出错现象。土壤含水量较大(大于 48.6mm), 如 48.7mm 时, 不仅震荡明显, 且迭代次数达 17 次时, 迭代计算开始出错。

迭代震荡明显的原因分析。当土壤含水量  $W$  较小时, 下渗能力  $f$  较大。又因  $k$  值较小, 故  $kW$  值相对于式(5)中右端  $f_m$  可以忽略不计, 因此迭代震荡较小, 属于正常现象, 收敛速度快。而当土壤含水量  $W$  居中时,  $kW$  值比  $f_m$  稍小, 由式(5)知, 迭代结果  $f^i$  基本上由本次迭代初值  $f^{i-1}$  决定, 此时, 若  $f^{i-1}$  偏小, 则  $\ln \frac{f_m - f_c}{f^{i-1} - f_c}$  偏大较多, 发生较为明显的迭代震荡。

减小迭代震荡、加快收敛速度的方法。本文提出了采用算术平均法减小迭代震荡。具体方法是, 用  $(f^{i-1} + f^i)/2$

(而不是传统迭代法中的  $f^i$ ) 作为下次迭代初值。经计算, 效果明显。例如, 土壤含水量为 43.0 mm 时, 新方法迭代次数由传统迭代法的 17 次减少为 10 次, 计算效率大大提高。

迭代计算出错的原因分析。当土壤含水量  $W$  较大时, 下渗能力  $f$  较小。此时,  $kW$  值接近甚至大于  $f_m$ , 迭代计算中一旦出现  $f^{i-1}$  偏大, 则因  $f_c \ln \frac{f_m - f_c}{f^{i-1} - f_c}$  偏小, 导致  $f^i < 0$ , 则  $\frac{f_m - f_c}{f^i - f_c} < 0$ , 使得下次迭代计算  $\ln \frac{f_m - f_c}{f^i - f_c}$  时出错。

避免迭代计算出错的方法。迭代计算过程中, 实时计算迭代震荡的幅度, 限制震荡幅度在 200% 以内, 同时与算术平均方法相结合。200% 为笔者得出的经验值, 出发点是: 只允许适度的震荡(若震荡幅度过小, 则迭代收敛慢; 震荡幅度过大, 则迭代计算容易出错)。这样, 既避免了迭代出错, 又加快了迭代收敛速度。例如, 土壤含水量为 51.0 mm 时, 采用该方法迭代计算不出错, 仅经 4 次迭代, 结果收敛于 0.79mm/h, 可见, 效果很好。计算实例见表 2。

表2 下渗能力计算的迭代法  
Table2 The calculation of the infiltration capacity  $f$  with iterative algorithm

土壤含水量 $W/\text{mm}$	传统方法	算术平均法	算术平均+限制震荡幅度法	下渗能力 $f/\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$
收敛迭代次数				
10	5	6	6	1.90
13	6	7	7	1.80
16	6	7	7	1.71
19	6	7	7	1.62
22	6	7	7	1.53
25	6	7	7	1.44
28	7	7	7	1.36
31	8	7	7	1.27
34	10	7	8	1.19
37	10	9	8	1.11
40	11	9	9	1.04
43	17	10	11	0.97
45	20	10	10	0.92
49	/	12	12	0.83
51	/	13	4	0.79
55	/	19	4	0.72
58	/	/	4	0.67
61	/	/	5	0.51
64	/	/	7	0.47

从表 2(表中出现“/”的项表示迭代计算出错)计算结果可见, 当土壤含水量较小(本例为  $W < 43.0\text{mm}$ )时, 传统迭代法收敛时的迭代次数少于算术平均法, 因

为算术平均法抑制了有效震荡幅度,使其过小,迭代收敛反而变慢;当土壤含水量适中(本例为  $43.0\text{mm} < W < 49\text{mm}$ )时,算术平均法相对于传统迭代法的优势就体现出来了;当土壤含水量较大(本例为  $W > 49\text{mm}$ )时,算术平均法相与传统迭代法都出现迭代错误,这时只能使用算术平均法与限制震荡幅度法相结合的方法。

### 3 流域平均蓄水容量与霍顿下渗公式三参数间的关系

由前述可知,要避免迭代计算出错,应有  $f - f_c > 0$ ,再结合式(5)得:

$$f_m - kW + f_c \ln \frac{f_m - f_c}{f - f_c} > f_c \quad (6)$$

因为使用的产流模式为超渗产流而非蓄满产流,降雨过程中,流域平均土壤含水量  $W$  不可能大到使得下渗能力接近稳渗率,即  $f \approx f_c$ 。经分析取:

$$f - f_c = e^{-2}(f_m - f_c) \sim e^{-4}(f_m - f_c) \quad (7)$$

按照式(7),对本例霍顿下渗公式的三参数取值,当  $f - f_c = e^{-2}(f_m - f_c)$  时,有  $f_c/f = 62\%$ ;当  $f - f_c = e^{-3}(f_m - f_c)$  时,有  $f_c/f = 82\%$ ;当  $f - f_c = e^{-4}(f_m - f_c)$  时,有  $f_c/f = 92\%$ 。

将式(7)代入式(6)得  $W < \frac{1}{k}[f_m + (1 \sim 3)f_c]$ ,即:

$$W_m = \frac{1}{k}[f_m + (1 \sim 3)f_c] \quad (8)$$

上式为本文推导出的流域平均蓄水容量  $W_m$  的取值范围。也就是说,超渗产流中的参数  $W_m, f_m, f_c$  与  $k$  取值应满足式(8)给出的范围,这一结论对工程计算中超渗产流模式下采用霍顿下渗公式时模型参数的率定具有一定的理论指导意义。按本例三参数取值,流域平均

蓄水容量在  $65.5 \sim 85.5\text{mm}$  之间,这与实际情况是吻合的。

### 4 结语

超渗产流是干旱和半干旱流域以及湿润流域的干旱季节常用的产流模式,以霍顿下渗公式为基础的超渗产流的迭代算法计算过程中,易发生迭代震荡和迭代出错两种情况。针对这两个问题进行了研究,分析了问题产生的原因,提出了解决问题的方法。同时,推导出了超渗产流模式下流域平均蓄水容量与霍顿下渗公式中三参数间的经验关系式,丰富了超渗产流计算的理论,并对工程计算中模型参数的率定具有一定的指导意义。

参考文献:

- [1] 芮孝芳. 产流模式的发现与发展[J]. 水利水电科技进展, 2013,33(1): 1-6+26. (RUI Xiaofang. The discovery and development of runoff formation models [J]. Advances in Science and Technology of Water Resources, 2013,33(1):1-6+26. (in Chinese))
- [2] 张光义,夏军,张翔,等. 具有空间分布的超渗产流模型[J]. 人民黄河, 2007,29(12):18-20. (ZHANG Guangyi, XIA Jun, ZHANG Xiang, et al. Runoff formation models in excess of infiltration with the spatial distribution[J]. Yellow River, 2007,29(12):18-20. (in Chinese))
- [3] 包为民. 水文预报 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2006. (BAO Weimin. Hydrology Forecasting [M]. Beijing: China WaterPower Press, 2006. (in Chinese))
- [4] 安波,宋中海. 石门流域超渗产流模型的建立[J]. 水文, 1998,(1):41-43+28. (AN Bo, SONG Zhonghai. Building of runoff formation models in excess of infiltration in Shimen watershed [J]. Hydrology, 1998, (1):41-43+28. (in Chinese))
- [5] 黄膺翰,周青. 基于霍顿下渗能力曲线的流域产流计算研究[J]. 人民长江,2014,45(5):16-18+23. (HUANG Yinghan, ZHOU Qing. Calculation of basin runoff yield based on Horton infiltration capacity curve[J]. Yangtze River, 2014,45(5):16-18+23. (in Chinese))

## Some Problems in Runoff Yield Excess Calculation Based on Horton Infiltration Formula

CHENG Yincai<sup>1</sup>, WANG Jun<sup>2</sup>, LI Minghua<sup>2</sup>

(1. Water Conservancy and Civil Engineering College, Shandong Agricultural University, Tai'an 271018, China;

2. Tai'an Hydrology Bureau of Shandong Province, Tai'an 271000, China)

**Abstract:** When runoff yield excess was calculated by using Horton infiltration formula, and the corresponding infiltration capacity was calculated based on watershed soil moisture ( $W$ ) by using iterative algorithm, it was found that when  $W$  is lesser, iterative calculation is normal; when  $W$  is moderate, iterative oscillation often occurs; when  $W$  is larger, iterative calculation error is easy to happen. This paper, therefore, analyzed the reasons of the iterative oscillation and iterative calculation error, and proposed to reducing iteration oscillation by using arithmetic mean method and solving the problem of iterative calculation error by combining the restriction of oscillation amplitude with arithmetic average method. Meanwhile, the experience relation formula of watershed average water storage capacity and the three parameters in the Horton infiltration formula was deduced in the mode of runoff yield excess.

**Key words:** Horton infiltration formula; runoff yield excess; iterative oscillation; iterative calculation error