

切比雪夫伪谱法模拟地震波场

刘鲁波, 陈晓非, 王彦宾

(北京大学地球与空间科学学院地球物理学系, 北京 100871)

摘要:介绍了切比雪夫伪谱法以及快速傅立叶算法在其中的应用,并用切比雪夫伪谱法模拟二维有限区域弹性介质地震波场。分别计算了兰姆问题,均匀介质中心爆破源问题,介质内部的速度异常体问题以及各种分界面情况下地震首波传播问题。

关键词:切比雪夫伪谱法;傅立叶伪谱法;快速傅立叶算法;地震波场;首波

中图分类号: P315.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0844(2007)01-0018-08

Chebyshev Pseudospectral Method for Seismic Wavefield Modeling

LIU Lu-bo, CHEN Xiao-fei, WANG Yan-bin

(Department of Geophysics, School of Earth and Space Sciences, Beijing University, Beijing 100871, China)

Abstract: The pseudospectral methods, especial Fourier method and Chebyshev method are introduced first. Then the first order 2-D elastodynamic seismic wavefield equation based on velocity-stress by the Chebyshev pseudospectral method is solved, and in the computation the Lamé problem, the problem of demolition source in center of homogeneous media, the velocity anomaly in intermedia, and the more important problem, headwave propagation in multi-layered media are simulated. At last, we try to get a similar pseudospectral method to Chebyshev method.

Key words: Chebyshev pseudospectral method; Fourier pseudospectral method; Fast Fourier arithmetic; Seismic wavefield; Headwave

0 引言

伪谱法是一种高效、高精度计算地震波动场的数值方法,它利用快速傅里叶变换对波动方程进行空间求导。对介质参数平滑变化的非均匀介质,最小波长所需要的节点数比有限差分法少,因此和有限差分法相比,它的计算精度高、计算速度快,很适合于大规模模型的计算^[1-2]。最初的伪谱法大多基于三角函数,随后出现了基于傅立叶函数、切比雪夫函数的伪谱法,发展出更有效的自由边界和吸收边界的处理方式^[3-5]。近年来伪谱法有进一步的发展,出现了完整的极坐标下的伪谱法用于全球模型的计算^[6],以及应用并行计算将伪谱法应用于三维情况^[7],都取得了很好的效果。

本文主要应用切比雪夫伪谱法模拟二维有限区域地震波场,重点是分层介质情况下首波的运动规

律。首波在研究地球内部构造、地震反演、勘探等领域有重要作用。平直分界面情况下可以严格的计算出首波的传播路径,但实际问题中界面是不规则的,这时严格求解就非常困难。此时一般假设首波也是沿界面传播的,本文用切比雪夫伪谱法进行数值模拟,检验这一假设是否正确。

1 切比雪夫伪谱法

先简单介绍伪谱法的基本理论^[2,8]。用伪谱法求解微分方程主要包含两步工作:第一步是离散化处理,用一定的方式在整个区域上选取格点构成一个网络。而其他点上的变量值可以用插值的方法得到,因此一般在计算过程中我们只关心格点上的变量值。第二步就是选取合适的基函数,在已知格点

收稿日期:2006-05-12

基金项目:国家自然科学基金(40474012,40521002)

作者简介:刘鲁波(1982-),男(汉族),陕西延安人,硕士生,主要从事地震波理论与数值计算研究。

上的变量值的情况下构造插值函数,计算格点上的变量值的空间导数。伪谱法是全局方法,只能用在空间域。如果所求解的是含时微分方程,一般用简单的有限差分方法来处理时间域的计算。

一般的伪谱法用等间距的格点,而切比雪夫伪谱法的离散化处理使用切比雪夫格点

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{M} \quad i = 0, \dots, M \quad (1)$$

基本的计算区域被限制在 $[-1, +1]$ 之间。

插值基函数为切比雪夫函数

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (2)$$

$$u(x) = \sum_{m=0}^M a_m T_m(x) = \sum_{m=0}^M a_m \cos(m \arccos \cos x) \quad (3)$$

其中 a_m 是插值系数。

要求在切比雪夫格点上插值公式与已知变量值相等,得

$$a_m = \frac{2}{Mc_{M,m}} \sum_{i=0}^M \frac{u(x_i)}{c_{M,i}} \cos \frac{\pi mi}{M} \quad (4)$$

其中 $c_{M,m}$ 是系数,定义为

$$c_{M,m} = \begin{cases} 1 & 0 < m < M \\ 2 & m = 0, M \end{cases}$$

由此可以推导出函数偏微分的公式为

$$\frac{du}{dx} = \sum_{m=0}^M a_m T'_m(x) = \sum_{m=0}^M b_m T_m(x) \quad (5)$$

其中 $b_M = 0, b_{M-1} = 2Ma_M$; $c_{M,m}b_m = b_{m+2} + 2(m+1)a_{m+1}, 0 \leq m \leq M-2$ 。

由于计算过程中一般只需要格点上的变量值,我们将式(1)代入式(5),得

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \sum_{m=0}^M b_m T_m(x_i) = \sum_{m=0}^M b_m \cos \frac{\pi mi}{M} \quad (6)$$

可以看出切比雪夫伪谱法时将空间微分转化为一个有限序列加权求和,以此来降低计算量和计算难度。

2 切比雪夫伪谱法求解二维各向同性弹性介质波动方程

2.1 波动方程

地震波场满足的各向同性弹性介质波动方程,在直角坐标系下可用速度-应力表示为

$$\begin{aligned} \rho u_t &= \tau_{11,x} + \tau_{12,y} + \rho f_1 \\ \rho v_t &= \tau_{12,x} + \tau_{22,y} + \rho f_2 \\ \tau_{11,t} &= (\lambda + 2\mu)u_x + \lambda v_y \\ \tau_{22,t} &= \lambda u_x + (\lambda + 2\mu)v_y \\ \tau_{12,t} &= \mu(v_x + u_y) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $(u, v) = (U_t, V_t)$,表示质点 x, y 方向的速度; $f_1(x, y, t), f_2(x, y, t)$ 分别表示 x, y 方向上的外力。

我们用简单的有限差分方法来处理时间域的计算;而 x, y 方向的空间离散化处理都使用切比雪夫格点 $x_i = \cos \frac{\pi i}{M}, i = 0, \dots, M$,基本的计算区域被限制在 $(x, y) \in [-1, +1] \times [-1, +1]$ 之间。

2.2 震源

本文使用了两种震源。第一种是单力点源,表达式

$$f(x, y, t) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) S^{(p)}(t) \quad (8)$$

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ M/2 & x \neq x_0 \end{cases} \quad (9)$$

$$S(t) = \begin{cases} e^{-a^2(t-t_s)^2} + e^{-a^2 t_s^2} (t - t_s)^2 a^2 & 0 \leq t \leq 2ts \\ 0 & 2ts \leq t \end{cases} \quad (10)$$

其中 p 是求导次数; a 决定了外力的集中程度; t_s 决定外力 $S(t)$ 的峰值出现的时刻; $S(t)$ 最高频率为

$$f_{\text{peak}} = \frac{a}{\pi}, \text{震源最大频率取 } 3f_{\text{peak}}。$$

第二种是爆破源^[6],表达式

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y, t) &= -M_0 (\vec{e}_x \frac{\delta}{\delta x} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ &\quad - \vec{e}_y \delta(x - x_0) \frac{\delta}{\delta y} \delta(y - y_0)) \delta(t - t_0) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 (x_0, y_0, t_0) 是爆破源中心的时空位置。但是在数值计算中不能直接计算 δ 函数,因此在实际计算中用Herrmann函数代替:

$$\delta(x, x_0) = \text{herrman}(x, x_0, \tau)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\tau} \left(\frac{x - x_0}{\tau} + 2 \right)^2, & -2\tau + x_0 \leq x < -\tau + x_0 \\ -\frac{1}{4\tau} \left(\left(\frac{x - x_0}{\tau} \right)^2 + 2 \right)^2, & -\tau + x_0 \leq x < \tau + x_0 \\ \frac{1}{4\tau} \left(\frac{x - x_0}{\tau} - 2 \right)^2, & \tau + x_0 \leq x < 2\tau + x_0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

式(12)表示一个宽度为 4τ ,全区域积分的等于1,并且以中心 x_0 对称的波包。同样的, δ 函数的微分用Herrmann函数的微分代替:

$$\frac{d}{dx}\delta(x, x_0) = \frac{d}{dx}\text{herrman}(x, x_0, \tau) \quad (13)$$

2.3 空间离散化处理和空间微分

使用切比雪夫伪谱法在空间区域 $(x, y) \in [-1, +1] \times [-1, +1]$ 上求解基本方程(7)式。首先是格点数的选取。参考文献[9]以正弦波为例,证明应用切比雪夫伪谱法时单个波长最少需要取 π 个格点,因此我们根据问题中存在的最小波长来决定选取的格点数。对弹性介质最小波长一定是剪切波波长,震源的最高频率记为 f_{peak} ,有

$$\lambda_{\min} = \lambda_s = \frac{c_s}{f_{\text{peak}}} \quad (14)$$

切比雪夫伪谱法中心的格点最稀疏,最大间距为

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= x_{\frac{M}{2}-1} - x_{\frac{M}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{M}\right) - \cos\frac{\pi}{2} \\ &= \sin\frac{\pi}{M} \approx \frac{\pi}{M} \end{aligned} \quad (15)$$

选取格点数 M ,使得 $\pi\delta_{\max} \leq \lambda_{\min}$ 即可。空间格点数确定后,用下式选取格点:

$$\begin{aligned} x_i &= \cos\frac{\pi i}{M} \quad i = 0, \dots, M \\ y_j &= \cos\frac{\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (16)$$

在整个区域上得到 $(M+1) \times (N+1)$ 个格点,给这些格点上的变量赋初值为零。

将一维情况的插值公式直接将其推广到二维,得

$$P_{MN}u(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} T_m(x) T_n(y) \quad (17)$$

其中 a_{mn} 是插值系数,假设 t_0 时刻的格点上的变量值 $u(x_i, y_j)$ 是已知的,得

$$a_{mn} = \frac{4}{MNC_{M,m}C_{N,n}} \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \frac{u(x_i, y_j)}{C_{M,i}C_{N,j}} \cos\frac{\pi mi}{M} \cos\frac{\pi nj}{N} \quad (18)$$

其中 $c_{M,m}$ 是系数,定义为

$$c_{M,m} = \begin{cases} 1 & 0 < m < M \\ 2 & m = 0, M \end{cases}$$

T 是切比雪夫函数, $T_n(x) = \cos(ncos^{-1}x)$ 。同一时刻空间偏微分的插值公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} T'_m(x) T_n(y) \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn}^{(10)} T_m(x) T_n(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} T_m(x) T'_n(y) \end{aligned} \quad (19)$$

$$= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn}^{(01)} T_m(x) T_n(y) \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} b_{M,n}^{(10)} &= 0, \quad b_{M-1,n}^{(10)} = 2Ma_{M,n}, \\ c_{M,m}b_{m,n}^{(10)} &= b_{m+2,n}^{(10)} + 2(m+1)a_{m+1,n}, \\ 0 &\leq m \leq M-2 \\ b_{m,N}^{(01)} &= 0, \quad b_{m,N-1}^{(01)} = 2Na_{m,N}, \\ c_{N,n}b_{m,n}^{(01)} &= b_{m,n+2}^{(01)} + 2(n+1)a_{m,n+1}, \\ 0 &\leq n \leq N-2 \end{aligned}$$

由于计算中同样只需要格点上的值,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{im}^{(10)} T_m(x_i) T_n(y_j) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{im}^{(10)} \cos\frac{\pi mi}{M} \cos\frac{\pi nj}{N} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{im}^{(01)} T_m(x_i) T_n(y_j) \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{im}^{(01)} \cos\frac{\pi mi}{M} \cos\frac{\pi nj}{N} \end{aligned} \quad (22)$$

类似的,公式(18),(21),(22)都可以利用二维快速傅立叶算法来计算。

2.4 时间离散化处理和时问微分

基本方程式(7)是含时微分方程,本文用二阶 Runge-Kutta 法处理时间微分。相邻两个格点间的未知量的值通过插值求得。每个时间步长内波的传播不能超过一个格点间距,因此选定格点数 M 后,再用最小间距决定时间步长。切比雪夫格点在边界处最密集,最小间距为

$$\delta_{\max} = x_0 - x_1 = 1 - \cos\frac{\pi}{M} = \frac{\pi^2}{2M^2} \quad (23)$$

要求 $c_{\max}\Delta t \leq \delta_{\min}$,得稳定性条件为

$$\Delta t \leq \frac{\pi^2}{2c_{\max}M^2} \quad (24)$$

本文在计算中用以下经验公式确定时间步长:

$$\Delta t = \frac{6}{c_{\max}K^2} \quad (25)$$

其中 $K = \max(M, N)$ 。

2.5 边界条件

得到某个时刻的未知量的值后还需要根据边界条件进行修正。我们引入参量 R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , 定义如下^[8]:

在边界 $x = \pm 1$ 上

$$\begin{aligned} R_1 &= \tau_{11} + \rho c_p u \\ R_2 &= \tau_{11} - \rho c_p u \\ R_3 &= \tau_{12} + \rho c_s v \\ R_4 &= \tau_{12} - \rho c_s v \\ R_5 &= \lambda \tau_{11} - (\lambda + 2\mu) \tau_{22} \end{aligned} \quad (26)$$

在边界 $y = \pm 1$ 上

$$\begin{aligned} R_1 &= \tau_{22} + \rho c_p v \\ R_2 &= \tau_{22} - \rho c_p v \\ R_3 &= \tau_{12} + \rho c_s v \\ R_4 &= \tau_{12} - \rho c_s v \\ R_5 &= (\lambda + 2\mu)\tau_{11} - \lambda\tau_{22} \end{aligned} \quad (27)$$

它们的物理意义是:在边界 $x = -1$ 及 $y = -1$ 上, R_1, R_3 代表流出, R_2, R_4 代表流入;在边界 $x = +1$ 及 $y = +1$ 上, R_1, R_3 代表流入, R_2, R_4 代表流出; R_5 始终代表静止参量。

对于吸收边界有

$$\begin{aligned} R_{\text{outgoing}}(W^{t_0+\Delta t}) &= R_{\text{outgoing}}(W^*) \\ R_{\text{incoming}}(W^{t_0+\Delta t}) &= 0 \\ R_5(W^{t_0+\Delta t}) &= R_5(W^*) \end{aligned} \quad (28)$$

对于自由边界有

$$\begin{aligned} \tau_{22}^{t_0+\Delta t} &= 0 \\ \tau_{12}^{t_0+\Delta t} &= 0 \\ R_{\text{outgoing}}(W^{t_0+\Delta t}) &= R_{\text{outgoing}}(W^*) \\ R_5(W^{t_0+\Delta t}) &= R_5(W^*) \end{aligned} \quad (29)$$

本文中 $x = \pm 1$ 和 $y = +1$ 是吸收边界, $y = -1$ 是自由边界。若点源震源在自由边界 $y = -1$ 上, τ_{22} 用 $\tau_{22}^{t_0+\Delta t} = S(t_0+\Delta t)\delta(x-x_0)$ 来修正。注意修正仅仅针对边界格点上的变量值,其它格点上的变量值不变。通过修正我们就得到了该时刻的未知量的准确值。

总结流程如下:(1)用式(16)划分格点,格点上应力、速度的初值设为零;(2)用插值公式(18), (21), (22)求出格点上的应力、速度对 x, y 坐标的偏导值;(3)根据基本方程式(7)用二阶 Runge-Kutta 法作时间微分;(4)根据边界条件式(28)和式(29)修正,计算出下一时刻格点上的应力、速度的准确值;(5)返回第二步,循环直到指定时间。

3 数值计算结果

以下是一些具体问题的计算结果。包括兰姆问题、中心速度异常体以及各种分界面上首波的传播。每种情况都先给出介质和震源参数,部分同时给出示意图;然后给出计算结果的图像以及对结果的讨论。所有的波场快照都放在最后的快照图集中。

3.1 兰姆问题

介质性质: $\lambda = \mu = \rho = 1$; P 波速度 $c_p = \sqrt{3}$; S 波速度 $c_s = 1$ 。震源是垂直于自由边界向下的点源,位于自由边界中点 $(0, -1)$ 处; $p = 1$; $a = 8.31$; t_s

$= 0.25$, 即 $f_1 = 0, f_2 = S^1(t)\delta(x)\delta(y+1)$ 。在自由边界 $(0.5, -1)$ 处接收。计算中取 $M=54, N=50$ (图 1)。

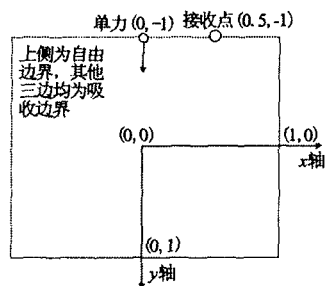


图 1 兰姆问题示意图

Fig. 1 Sketch of Lamb problem.

图 2(a)、(b) 分别是震源和接收点 u 分量随时间变化的图像。附图 1 的四幅图是不同时刻的全区域快照, z 轴是 $\tau_{11} + \tau_{22}$ 的值。图中很好的再现了面波和体波的传播过程,和参考文献[8]的结果一致,说明该方法是正确的。

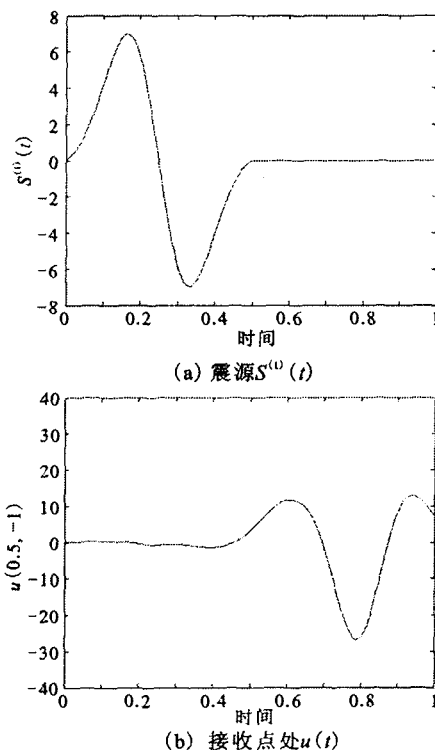


图 2 震源 $S^{(1)}(t)$ 和接收点处的 $u(t)$ 的图像

Fig. 2 The focal $S^{(1)}(t)$ and receive point $u(t)$.

3.2 中心低速体情况

介质 1: $\lambda = \rho = 1; \mu = 4; c_p = 3; c_s = 2$ 。介质 2: $\lambda = \mu = \rho = 1; c_p = \sqrt{3}; c_s = 1$, 是一个以原点为圆心, 半径为 0.5 的圆形低速区域。震源是爆破源, 其中心 $x_0 = -0.8; y_0 = 0.8$; 空间宽度为 $\tau_x = \tau_y = 0.05$; 时间中心 $t_0 = 0.04$; 时间宽度为 $\tau_t = 0.02$ 。计算中

取 $M = 64, N = 64$ (图3)。

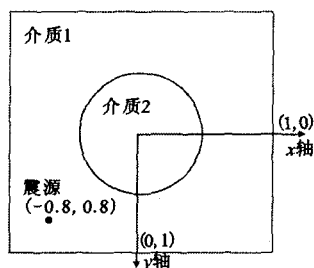


图3 中心低速示意图

Fig. 3 Sketch of low-velocity in center.

附图2清晰的显示出低速体的存在延缓了波的传播,由于反射波的缘故在低速体内部波的振幅较大,图像更清楚。

3.3 中心高速体情况

介质2: $\lambda = \rho = 1; \mu = 4$; 其他参数同3.2。

附图3中清晰的显示出高速体的存在加速了波的传播,由于波从高速介质传往低速介质的透射更强,所以还可以观察到成弧形的从高速介质中传出的波先一步到达边界,相对的高速体中的反射成分就比较弱。

3.4 平直分界面上首波的传播

两种介质的分界面为 $y = 0.0$ 。上侧为介质1: $\lambda = \rho = 1; \mu = 0.25; c_p = \sqrt{1.5}; c_s = \sqrt{0.5}$ 。下侧为介质2: $\lambda = \rho = 1; \mu = 4; c_p = 3; c_s = 2$ 。震源是爆破源,其中心 $x_0 = 0.8; y_0 = -0.2$; 空间宽度为 $\tau_x = \tau_y = 0.05$; 时间中心 $t_0 = 0.15$; 时间宽度为 $\tau_t = 0.075$ 。计算中取 $M = 128, N = 128$ 。

从附图4中可以观察到首波始终沿分界面传播,这与理论计算结果相同。

3.5 向下折的分界面上首波的传播

两种介质的分界面为

$$y = \begin{cases} 0.0, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x, & -0.8 \leq x < 0, \text{其他参数与3.4相} \\ 0.8, & -1 \leq x \end{cases}$$

同(图4)。

从附图5中可以观察到首波到达折点后,一部分透过分界面在介质1里传播,但仍然激发出新的首波,按折线的方向继续沿分界面传播。

3.6 向下弯曲分界面的首波传播

两种介质的分界面为 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}$, 其他参

数与3.4相同(图5)。

图6是在自由表面接受到的地震波信号,可以看到多次反射波的信号相当强烈。

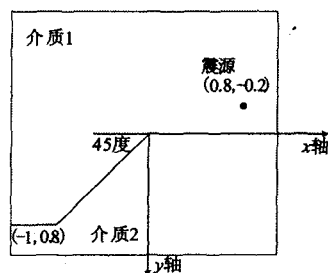


图4 下折分界面示意图

Fig. 4 Sketch of interface folded downwards.

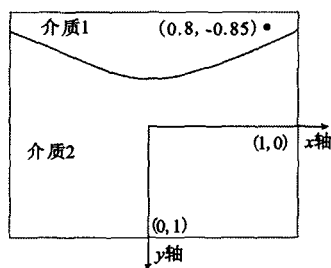


图5 下弯分界面示意图

Fig. 5 Sketch of interface curve downwards.

附图6的(a)、(b)、(c)、(d)四张图中,地震波主要集中在上侧低速介质中。这是因为分界面靠近自由表面,而且上侧为低速介质,地震波不易穿过分界面,就在自由表面和分界面上反复反射。这有点类似于沉积盆地汇聚地震波能量的现象。在它的干扰下首波并不明显。

附图6(e)、(f)两张图上首波很清晰,它仍然沿着弯曲的分界面传播,并且在传播过程中产生透射波。

4 讨论和结论

(1) 快速傅立叶变换的应用

在切比雪夫伪谱法中快速傅立叶算法的应用比较隐蔽。通常离散傅立叶变换的定义如下:设 N 是一个正整数, ω 是 N 次单位主根:

$$\omega = e^{-\frac{2\pi i}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} - i \sin \frac{2\pi}{N}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。并定义 $N \times N$ 矩阵 $F = [f_{kj}]$ 为 $[f_{kj}] = \omega^{kj}, k, j = 0, \dots, N-1$ 。

对任意 N 维向量 $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})^T$ 称向量 $c = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T = F_a$ 为向量 a 的离散傅立叶变换,写成分量形式为

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_{kj} a_j = \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{-j \frac{2\pi i k}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

取 c_k 的实部,令 $N = 2M; i = k; m = j$ 。得

$$c_i = \sum_{m=0}^{2M-1} a_m \cos \frac{\pi m i}{M} \quad i = 0, \dots, 2M-1$$

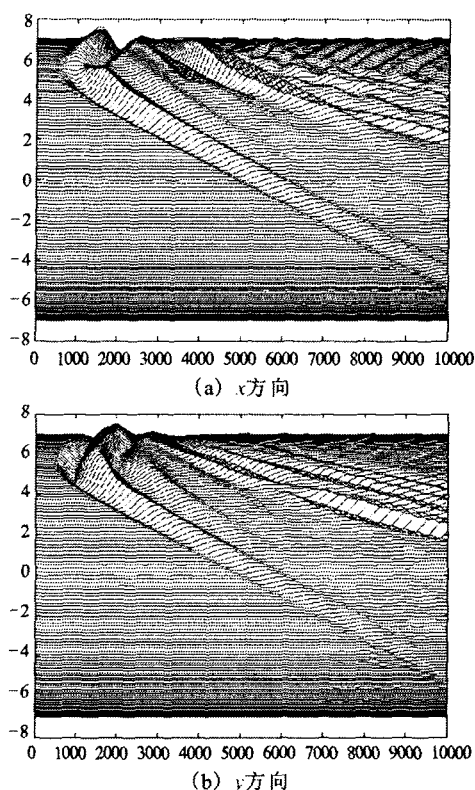


图6 表面点速度变化

Fig. 6 Velocity changes of face point with time.

注意观察公式(5)、(7)与上式的异同, 容易发现它们的右端非常类似, 仅仅是求和的项数不同。可以将 a_m, b_m 作为前 $M+1$ 项, 并在后 $M-1$ 项补零, 进行快速傅立叶变换后再取前 $M+1$ 项的实部。因此, 切比雪夫伪谱法只是利用了快速傅立叶算法快速求和, 而不是像通常的伪谱法那样把问题变换到频率域来求解。

(2) 计算区域的转换

由于不同的离散化处理, 傅立叶伪谱法的计算区域没有特殊限制, 而切比雪夫伪谱法被限制在 $[-1, +1]$ 之间, 这给它的应用带来了很大的局限性。

在处理大区域问题时需要做变换。如果做简单的线性变换, 在精度、时间要求不变的情况下, 原来区域长度增大一倍, 变换后的波长是原波长的 0.5 倍。要保证同样精度, 即每个波长取点数不变, 总格点数为原来的 4 倍, 时间步长为原来的 0.25 倍, 这样计算量为原来的 16 倍, 所需时间很快便超出可以接受的范围。

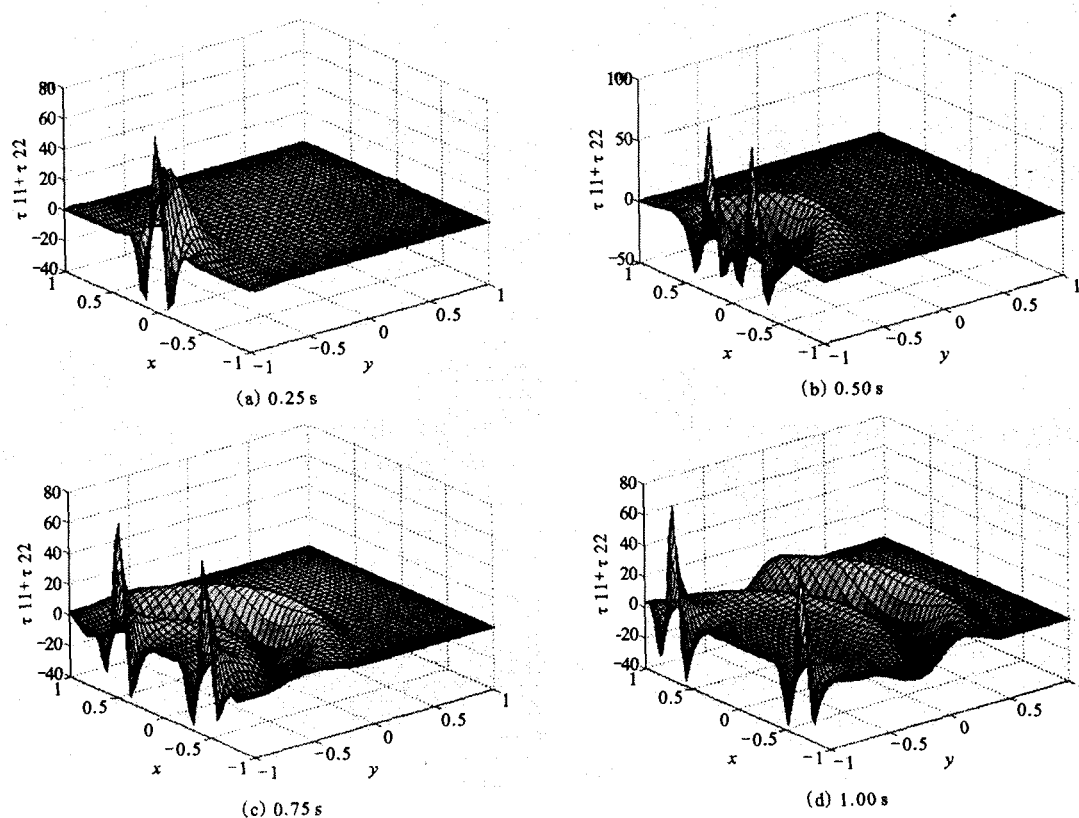
(3) 精度

伪谱法是一种全局方法, 计算任意格点上的值都要使用到全区域所有格点上的值, 再加上计算过程中使用了快速傅立叶算法, 引起了无法消除的理论误差。尤其是在靠近边界, 波形变化比较剧烈的情况下误差很明显, 因此对初期波形影响较大。例如在兰姆问题中, 理论上在 0.28 s 之前地震波不会到达接收点处, 但图像显示在 0~0.28 s 有明显的弯曲, 并不为零。从 0.25 s 全区域快照图上也可以看到在靠近自由边界, 首波两侧图像有明显的凸起。

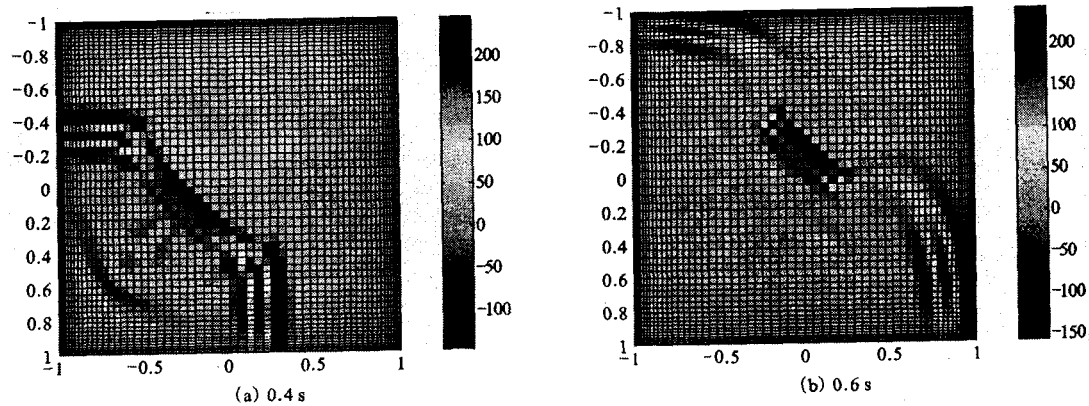
另一方面, 虽然切比雪夫伪谱法的在边界处格点密集, 但是参考文献证明这只能抵消了切比雪夫函数在边界处强烈震动带来的不利影响。所以边界处的精度并不一定比中心的精度高。

[参考文献]

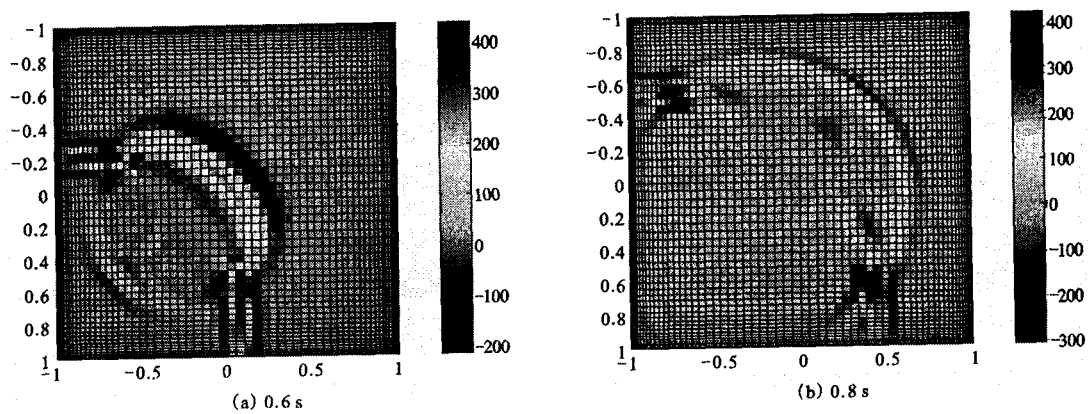
- [1] Bengt Fornberg. The pseudospectral method; Comparisons with finite differences for the elastic equation[J]. Geophysics, 1987, 52(4):483-501.
- [2] Dean C Witte, Paul G Richard. The pseudospectral method for simulating wave propagation[M]. North-Holland: Elsevier Science Publishers B. V., IMACS, 1990, 1:1-18.
- [3] Dan Kosloff, Mouse Reshef, Dan Loewenthal. Elastic wave calculations by the Fourier method[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1984, 74(3):875-891.
- [4] D Kosloff, DKessler, A Q Filho, et al., Solution of the equations of dynamics elasticity by a Chebyshev spectral method [J]. Geophysics, 1990, 55(6):734-748.
- [5] Dan Kosloff, Hillel Tal - Ezer. A modified Chebyshev pseudospectral method with an $O(N^{-1})$ time step restriction [J]. Journal of computational physics, 1993, 104:457-469.
- [6] Yanbin Wang, H Takenaka, T Furumura. Modelling seismic wave propagation in a 2-D cylindrical whole earth model using the pseudospectral method[J]. Geophys. J. Int., 2001, 145:689-708.
- [7] Heiner Igel. Wave propagation in three-dimensional spherical sections by the Chebyshev spectral method[J]. Geophys. J. Int, 1999, 136:559-566.
- [8] Jeffrey M Augenbaum. The pseudospectral method for limited-area elastic wave calculations[A]//Computational methods in geosciences[C]. Philadelphia, PA.:SIAM, 1992, 1-15.
- [9] A Solomonoff, E Turkel. Global properties of pseudospectral methods[J]. J. Comp. Phys., 1989, 81:239-276.



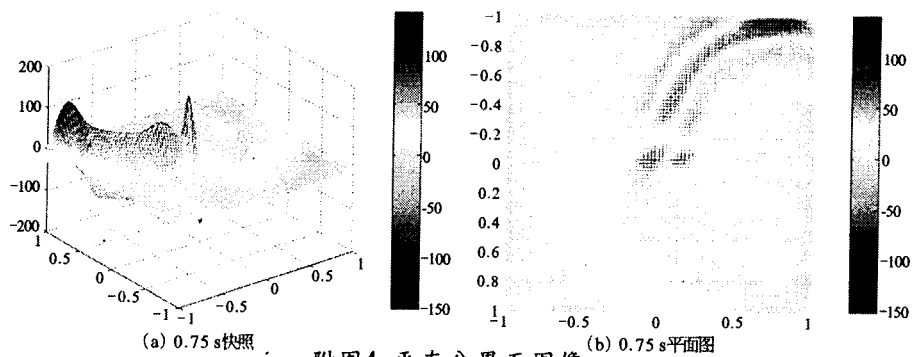
附图1 兰州问题快照



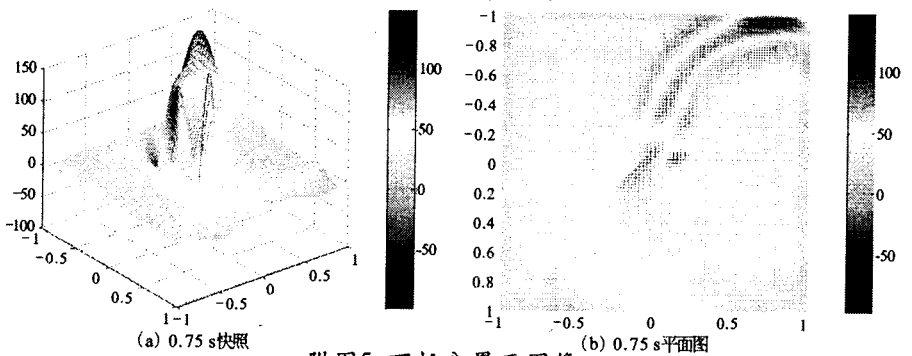
附图2 中心低速快照



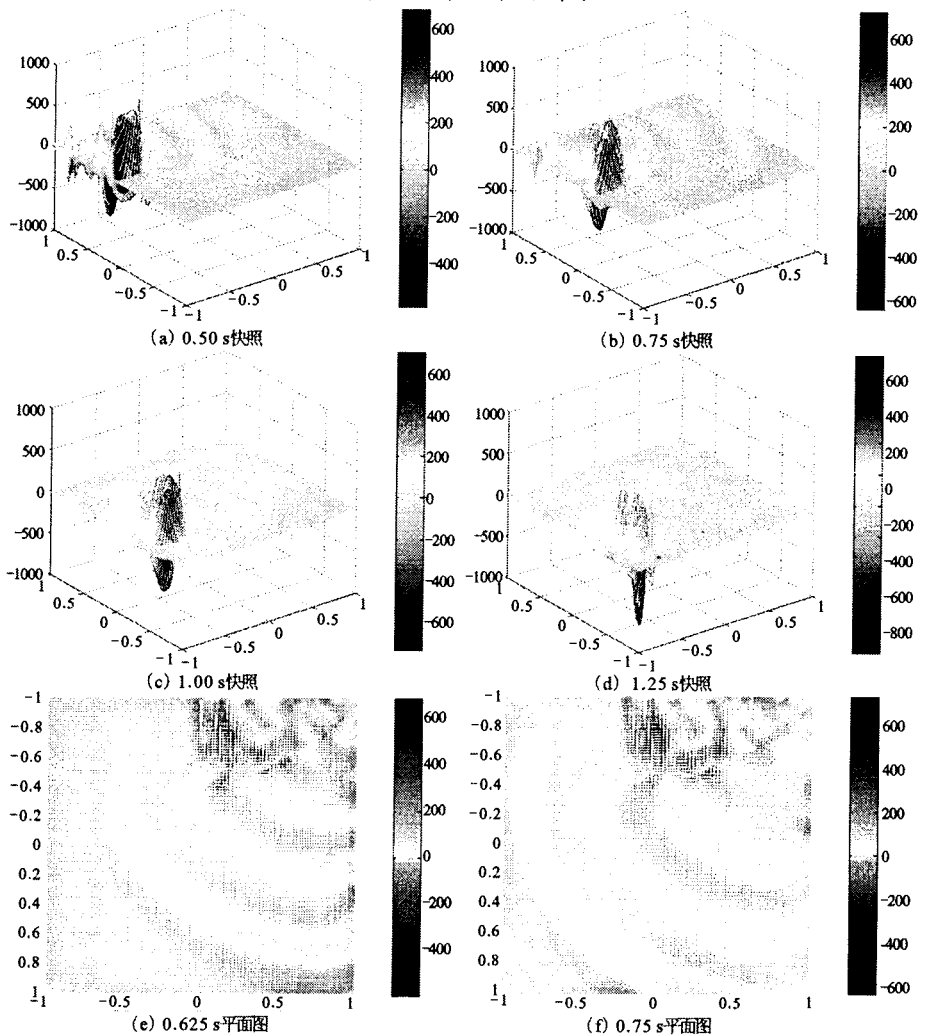
附图3 中心高速快照



附图4 平直分界面图像



附图5 下折分界面图像



附图6 下弯界面快照