第4卷 第4期　　西 北 地 震 学 报　　Vol.4, No.4
1982年12月　NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL　Dec., 1982

震源孕育的数学物理模式与波速异常的理论解释

冯德益　林命周　顾瑾平
（兰州地震研究所）　（上海市地震局）　（兰州地震研究所）

摘　　要

本文提出了一种震源孕育的数学物理模式，该模式把孕震过程分为扩容，包体形成与发展、流体扩散、失稳四个阶段。用数学物理方法研究了沿断裂带定向的圆柱形孕震区内的孕震过程。通过对这一过程的研究，得出了各孕震阶段持续时间的计算公式。计算结果与波速异常的实际观测结果符合较好。此外，还从理论上研究了确定两相介质中地震波传播速度的问题，给出了P、S波速度与速度比的计算公式，得出了一些定量结果。根据所述结果，对震前地震波速度异常的某些特征（异常持续时间、异常区形状大小及异常幅度）作出了一定的理论解释。最后，用量纲分析和相似理论方法对影响波速异常的一些因素作了简单的讨论。

一、前　　言

孕震过程的研究对地震预报无疑有重大意义，因此，国内外对此均相当重视。我们在有关资料的基础上对孕震过程作了下述设想：

设水或其它某种流体是岩石的重要组成部分，地下岩石平时处于饱和状态。如果最大、中等和最小远场边界主应力为σ_{10}、σ_{20}和σ_{30}，孔隙压力为P_0，则岩石受到的有效应力为：$\sigma_i=\sigma_{i0}-P_0$（i = 1，2，3）。当构造运动使σ_{10}增加时，如果σ_1达到了岩石极限强度σ_2的$\frac{1}{2}$～$\frac{2}{3}$时，岩石就发生扩容，P_0下降为$\overline{P}_p$（发生强烈扩容时，P_0最后可趋近于零），$\frac{V_p}{V_s}$下降；当σ_1接近或稍微超过岩石的线性弹性极限σ_p时，扩容岩石中的裂隙开始集中，形成一个区域，即文献[1]所谓的“包体”，此时$\frac{V_p}{V_s}$继续处于低值，应力轴则由于包体的弹性模量低于周围介质而发生偏转，从而在包体中形成和包体主轴相垂直的张应力（σ_1），与此同时水或流体就从外围扩散进来（事实上，扩散是裂隙一扩张就开始了，由于在以扩容

和包体形成为主的时间内扩散速度远低于裂隙扩张速度，因此作为共同作用可以认为那时的扩散作用趋于零，只有当裂隙停止扩展，扩散作用才突出出来，我们才视为扩散阶段的开始）。孔隙压力的定向和σ_1相同，从而使$\sigma_1+\overline{P}_p$的数值不断增加，水或流体的重新进入裂隙又使$\frac{V_p}{V_s}$回升。实验证明，当扩容体内的平均孔隙压力$\overline{P}_p$达到0.5P_c时，$\frac{V_p}{V_s}$异常将消失；当$\overline{P}_p$进一步增加，达到0.75P_c时，在具备$K=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$为某一临界值的时候，经扩容过的岩石会失稳，沿着包体长轴方向发生破裂，遂引起地震[2]。

与波速比$\frac{V_p}{V_s}$异常相对照，可把孕震过程划分为"扩容"、"包体形成"、"扩散"、"失稳"四个阶段，如图1所示。而整个波速比异常的持续时间T（前兆时间）则由扩容时间，包体形成时间，扩散时间及向失稳发展的时间四部分组成。

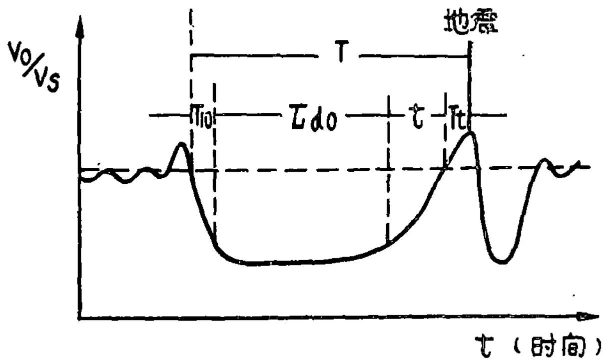

图1　波速比异常形态

T：孕震过程；T_{10}：扩容阶段；t：扩散阶段；τ_{do}：包体形成阶段；T_t：失稳过渡阶段。

在上述物理过程的基础上，文献[16]曾研究了球状孕震区的地震孕育过程，并从等效的角度上对波速异常的某些特性进行了解释。实际研究结果表明，孕震区在空间分布上往往呈现出明显的椭球度[10]。本文用圆柱形孕震区来逼近实际观测到的孕震区(波速异常区)，用数学物理方法导出了各阶段持续时间的解析解。此外，还选用了两相介质模型来模拟孕震区内的扩容介质，研究了地震波速度的变化。根据以上两方面的研究结果，对震前波速异常的某些主要特性（异常持续时间、异常区形状大小及异常幅度）作了较好的理论解释。

二、孕震的数理模式

1.圆柱状孕震区的扩容过程

众所周知，扩容过程中岩石的裂隙密度会随时间增大。如果用孔隙度表示裂隙密度，并认为扩容过程中的体积增量由孔隙度的提高（即裂隙密度的增大）所引起，则扩容岩石单位体积的增量ε满足：

$$\varepsilon = N - N_o, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial t}, \tag{2—1}$$

N_o为岩石原来的孔隙度，N为扩容后的孔隙度；而饱和岩石中长方形体积元dV 中的总渗流量，在dt后的增量则为：

$$-\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) dxdydzdt = \frac{\partial N}{\partial t} dxdydzdt,$$

即：
$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{u} = -\operatorname{div} \vec{u} \tag{2—2}$$

其中$\vec{u}$为流体速度。

流体速度$\vec{u}$与p之间存在着关系式：

$$\vec{u} = k\nabla P = -k\operatorname{grad}p, \tag{2—3}$$

式中　$k = \frac{K}{\mu}$为渗透系数，K为渗透率，μ是流体的绝对粘度。

由（2—2），（2—3）得

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k\Delta P。 \tag{2—4}$$

据〔3〕扩容时有
$$a\Delta P = \Delta \varepsilon, \tag{2—5}$$

且
$$a = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \tag{2—5.a}$$

ν为泊松比，G为剪切模量、E为 杨氏 模 量。由（2—1）、（2—4）、（2—5）即可导出

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \zeta(\Delta N - \Delta N_o), \tag{2—6}$$

式中
$$\zeta = \frac{k}{a}$$

考虑到扩容期间扩容体边界上的孔隙度变化极缓慢，故边界条件可取为：$\left.\frac{\partial N}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$，$\Sigma$为扩容区的边界面，n 为其法线方向，向外为正。于是扩容过程就转化为 求解以下定解问题：

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial N}{\partial t} = \zeta\Delta N + F(r, z), \\
F(r, z) = -\zeta\Delta N_0, \\
N|_{t=0} = N_0(r, z), \\
\frac{\partial N}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0 \quad , \\
\left.\frac{\partial N}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial N}{\partial z}\right|_{z=h} = 0
\end{array}\right\} \tag{2—7}$$

式中R为圆柱体的半径，h为圆柱体的高度，z = o，z = h分别为两个底面的位置。

使用柱坐标且在轴对称条件下求解，则（2—7）为：

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\zeta\left(\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 N}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)+F(r、z) \qquad (2-7a)$$

考虑到（2—7）的边界条件，我们可以把解取成以下形式：

$$N=\sum_{l;m}J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\cos\frac{m\pi z}{h}W_{lm}(t), \qquad (2-8)$$

式中$J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)$为第一类零阶贝塞尔函数，而$\lambda_l$为一阶贝塞尔函数的第l个零点，即$J_1(\lambda_l)=0$，$l=0，1，2，\cdots\cdots$；余弦函数中的m可取0，1，2，……。显然，解是满足边界条件的。

再把F（r，z）分解成相应的福利哀—贝塞尔级数：

$$F(r,z)=\sum_{l;m}A_{lm}J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\cos\frac{m\pi z}{h} \qquad (2-9)$$

后，便可得出$W_{lm}(t)$所满足的微分方程：

$$\dot{W}_{lm}(t)+\zeta\left[\left(\frac{\lambda_l}{R}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right]W_{lm}(t)=A_{lm}$$

此方程的通解为

$$W_{lm}(t)=\begin{cases}B_{lm}+C_{lm}\quad e^{-\zeta[(\frac{\lambda_l}{R})^2+(\frac{m\pi}{h})^2]t}, & l,\ m\neq 0,\\ A_{00}t+C_{00}, & l=m=0;\end{cases} \qquad (2-10)$$

式中
$$B_{lm}=\frac{A_{lm}}{\zeta\left[\left(\frac{\lambda_l}{R}\right)\right]^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2]} \qquad (2-10,\ a)$$

再将N_o（r，z）分解成福里哀一贝塞尔级数：

$$N_o(r,z)=\sum_{l;m}W_{lm}J_o\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\cos\frac{m\pi z}{h}, \qquad (2-11)$$

即可由初始条件得：$W_{lm}(0)=W_{lm}$，

代入（2—10）即可定出C_{lm}及C_{00}：

$$C_{lm}=W_{lm}-B_{lm},\quad C_{00}=W_{00} \qquad (2-12)$$

因此，N的最终表达式为

$$N(r,z,t)=(W_{00}+A_{00}t)+\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi z}{h}\left\{B_{om}+(W_{om}-B_{om})\cdot\right.$$
$$\left.\cdot e^{-\zeta(\frac{m\pi}{h})^2t}\right\}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\cos\frac{m\pi z}{h}\left\{B_{lm}+(W_{lm}-B_{lm})\right.$$
$$\left.\cdot e^{-\zeta[(\frac{\lambda_l}{R})^2+(\frac{m\pi}{h})^2]t}\right\} \qquad (2-13)$$

其中：

$$A_{lm}=\frac{4}{\delta_m hR^2[J_0(\lambda_l)]^2}\int_0^R\int_0^h F(r,z)\cdot J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\cos\frac{m\pi z}{h}\,rdrdz,\quad(2-14)$$

$$W_{lm}=\frac{4}{\delta_m hR^2[J_0(\lambda_l)]^2}\int_0^R\int_0^h N_0(r,z)\cdot J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\cos\frac{m\pi z}{h}\,rdrdz,\quad(2-15)$$

$$\delta_m=\begin{cases}2, & m=0,\\ 1, & m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\end{cases}$$

为了近似模拟地壳中与孕震过程有联系的深大断裂带，我们可把裂隙密度的初始分布状态假定为如下函数：

$$N_0(r,z)=N_0\left[1-q_1\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(1-q_2\sin\frac{\pi z}{h}\right)\right],\quad(2-16)$$

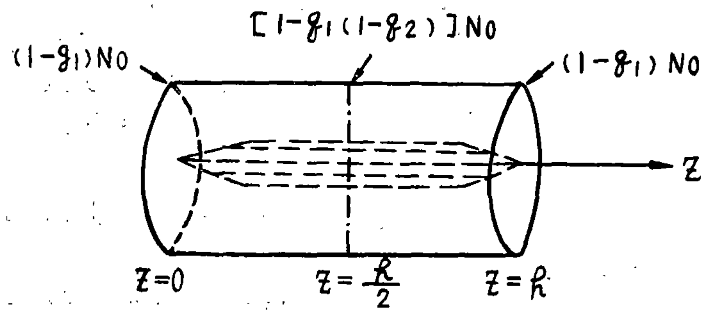

图 2　圆柱形扩容区的初始裂隙分布状态

图2为这种分布的大致示意图。$r=0$为裂隙集中的中心线。选取不同的q_1、q_2即可得到不同的初始裂隙分布状态，q_1、q_2均在0到1之间取值；z轴的方向即地壳中初始裂隙带延伸的方向。在这种初始分布函数下，按上述公式求解便可得到裂隙时空分布场的具体计算公式。如果我们对z方向求平均，即得以下表达式：

$$\overline{N}(r,t)=\left[1-\frac{(\pi-2q_2)q_1}{2\pi}\right]N_0+\left(\frac{4q_1}{R^2}-\frac{8q_1q_2}{\pi R^2}+\frac{\pi q_1q_2}{h^2}\right)\zeta N_0t+$$
$$+\sum_{l=1}^{\infty}J_0\left(\lambda_l\frac{r}{R}\right)\left[\frac{16q_1q_2\pi R^2}{h^2\lambda_l^4J_0(\lambda_l)}\cdot\frac{4q_1\pi\lambda_l^2h^2+8q_1q_2(2\pi^2R^2-\lambda_l^2h^2)}{\pi h^2J_0(\lambda_l)\lambda_l^4}\right.$$
$$\left.\cdot e^{-\zeta(\frac{\lambda}{R})^2t}\right]\quad(2-17)$$

下面我们对$r=0$及$r=R$和$q_2=0$及$q_2=1$的极端情况作一些计算。显然，$q_2=0$对应着扩容区内的初始裂隙分布状态在z方向上都一样的情况。在计算（2—17）的系数时，我们暂取$\frac{h}{R}=3.5$。图3给出了算得的$\frac{\overline{N}-N_0}{N_0q_1}$随$\frac{\zeta t}{R^2}$的变化曲线（$r=0$，R和$q_2=0,1$）。可以看出，当$t=0$时，扩容区中心部位裂隙密度N比边缘部位明显偏大，以后全区的N随时间增大，但越接近边缘部位N增加越迅速，当$\frac{\zeta t}{R^2}$达到0.12（对应于$q_2=1$）到

0.3（对应于$q_2=0$）时，全区裂隙密度基本上相同，可认为此时扩容阶段大致结束。因而扩容阶段的大致持续时间可以估计为：

$$T_{10}=\begin{cases}\dfrac{0.12R^2}{\zeta}, & q_2=1；\\[2ex] \dfrac{0.3R^2}{\zeta}, & q_2=0。\end{cases} \qquad (2—18)$$

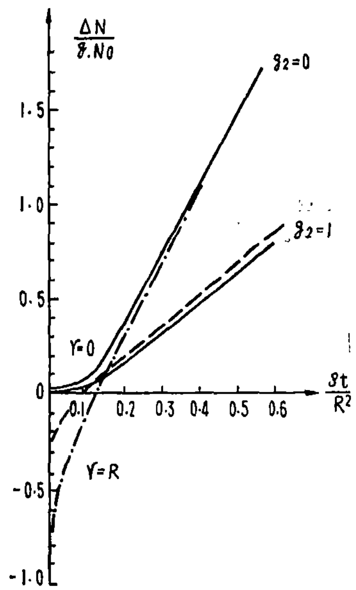

图 3 $\dfrac{\Delta N}{q_1N_0}$随$\dfrac{\zeta t}{R^2}$变化曲线

据文献〔4〕、〔5〕、〔6〕取$E=4\times10^{11}$达因/厘米^2，据文献〔2〕取$K=1/6$达西/厘泊，且取T_{10}以天为单位，R以公里为单位，则（2—18）可化为：

$$T_{10}=\begin{cases}0.0174R^2, & q_2=1；\\ 0.0435R^2, & q_2=0。\end{cases} \qquad (2—18a)$$

取平均后得$T_{10}=0.304R^2$. （2—18b）

最后，我们研究整个扩容区内平均裂隙密度随时间的变化。由（2—1）、（2—16）、（2—17）可以得出平均体积增量$\tilde{\varepsilon}$随时间变化的关系式：

$$\tilde{\varepsilon}(t)=\left(\frac{4}{R^2}-\frac{8q_2}{\pi R^2}+\frac{\pi q_2}{h^2}\right)q_1\zeta N_0 t \qquad (2—19)$$

将（2—18.b）代入（2—19）便可得出扩容阶段结束时的体积增量：

$$\tilde{\varepsilon}(T_{10})=(0.1216-0.0696q_2)q_1N_0 \qquad (2—20)$$

上式表明，$\tilde{\varepsilon}(T_{10})$依赖于扩容开始时初始裂隙的分布状态。

2.圆柱状孕震区内气体的形成与发展过程

设想扩容阶段结束时，在扩容体内有一个小圆柱体，它的裂隙较为发育且未关闭；进入包体阶段后，其中的裂隙更加迅速地发展且彼此串通，相应的区域范围也逐渐扩大，最后形成一个半径为r_2，长度为h_2的圆柱形大包体，而原扩容区剩余部分内的裂隙则要在相应的时间内关闭。如果关闭部分的体积减少量等于包体扩张部分的体积增加量，那么原整个扩容体的体积不发生变化，这在实际观测中即对应着地形变无明显变化，波速及波速比平均说来继续保持在低值附近的情况。由包体阶段整个原有扩容区的总体积不变的假设可得出以下关系式：

$$\int_0^{r_2}\int_0^{h_2}N^*(r,z,\tau_{d0})\,r\,dr\,dz+\int_{r_2}^{R}\int_{h_2}^{h}N_0(r,z)\,r\,dr\,dz$$

$$=\int_0^{R}\int_0^{h}N(r,z,T_{10})\,r\,dr\,dz=\frac{hR^2}{2}\tilde{N}(T_{10}) \qquad (2—21)$$

其中$N^*(r,z,\tau_{d0})$表示包体阶段结束时包体内的裂隙密度，τ_{d0}表示包体阶段的持续时间。而包体外围区在裂隙闭合后则恢复到其初始裂隙分布状态，$\tilde{N}(T_{10})$可由（2—17）、（2—18）定出，表示扩容结束时整个扩容体内的平均裂密度。

为了求得τ_{do}，我们通过求解文献[7]中导出的流体密度ρ所满足的方程：

$$\frac{\phi}{\lambda^2}\ \frac{\partial\rho\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\left\{\phi^2\rho\left[\left(\frac{(1-Q)\rho_1}{\mu_{1s}}+\frac{Q\rho_v}{\mu_{vs}}\right)\vec{g}-\left(\frac{1-Q}{\mu_{1s}}+\frac{Q}{\mu_{vs}}\right)\nabla\rho\right\}=0 \tag{2—22}$$

其中$\lambda^2=K_0/\phi_0^3$，$K_o=5$微达西[7]，$\phi_o=N(T_{10})$，ρ_v为蒸气密度，ρ_1为液体密度，$\vec{g}$为重力加速度，P为压力，Q为蒸气质量，$\phi=N$为孔隙度，μ_{1s}，μ_{vs}分别为液体和蒸汽的粘滞系数，α为经验常数，按〔7〕取$\alpha=3$。在地下15公里左右的孕震区，温度接近于临界点374℃，故可认为包体内的流体接近于临界状态。由〔7〕可知$\rho_{1s}=\rho_{vs}=\rho_1$，$\mu_{1s}=\mu_{vs}=\mu_1$，$V_1=\frac{\mu_1}{\rho_1}$，考虑到包体阶段中，裂隙合并、连通、增大，孔隙压力近似处处相等，$\nabla p\approx 0$，故（2—22）式可近似化为

$$\frac{\phi}{\lambda^2}\ \frac{\partial\rho\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\left\{\frac{\phi^3\rho}{V_1}\vec{g}\right\}=0\ . \tag{2—22a}$$

由于孕震区的长轴方向一般接近于与地面平行的方向，故可取z轴与地面平行，而把y轴方向取成垂直于地面且以向上的方向为正，于是方程又可化简为

$$\phi\frac{\partial\rho\phi}{\partial t}=\xi\ \frac{\partial\phi^3\rho}{\partial y}, \tag{2—3}$$

式中
$$\xi=\frac{|g|\,\lambda^2}{V_1}.$$

假定ρ按指数规律变化，即假定：

$$\rho=\rho_o e^{ny^2}\cdot e^{-\alpha t} \tag{2—24}$$

则φ的通解为：

$$\phi=\phi_o e^{-my^2}e^{\alpha t},\quad m=\frac{1}{3}n \tag{2—25}$$

为了确定ϕ_o及m等待定参数，我们先推导计算t时刻某一半径为r_1，长度为h_1的圆柱体内的总裂隙含量W的公式，即

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{h_1}dz\int_{-r_1}^{r_1}dx\int_{-\sqrt{r_1^2-x^2}}^{\sqrt{r_1^2-x^2}}\phi_o e^{-my^2}e^{\alpha t}dy\\&=\phi_o e^{\alpha t}\,h_1\int_{-r_1}^{r_1}dx\int_{-\sqrt{r_1^2-x^2}}^{\sqrt{r_1^2-x^2}}e^{-my^2}dy\end{aligned} \tag{2—26}$$

经过相应的积分运算，最后可得：

$$W=\phi_o h_1\pi r_1^2 e^{\alpha t}[1-0.25(mr_1^2)+0.0625(mr_1^2)^2-0.01302(mr_1^2)^3+\\+0.002279(mr_1^2)^4-0.0003418(mr_1^2)^5+0.00004476(mr_1^2)^6-\cdots\cdots]$$

$$=\phi_0 h_1 \pi r_1^2 e^{\alpha t}\cdot s(mr_1^2), \qquad (2-26a)$$

其中mr_1^2为无量纲量。

为使（2—26a）收剑，须选$mr_1^2<4$。由图4可知，当mr_1^2从0变到4时，$S(mr_1^2)$从1变到0.4左右。

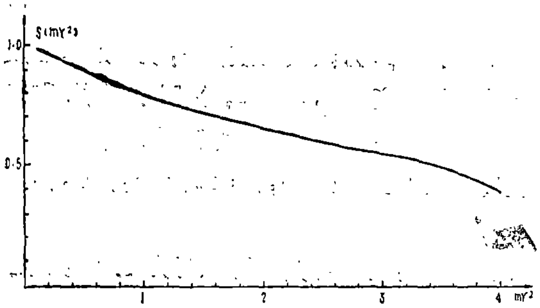

图4 S（mr^2）图

由初始条件知，当$t=0$时有：

$$W=W_0=\phi_0 h_0 \pi r_0^2 S(mr_0^2)$$

$$=\pi r_0^2 h\widetilde{N}(T_{10}).$$

于是，在求得$\widetilde{N}(T_{10})$后即可定出ϕ_0：

$$\phi_0=\frac{\widetilde{N}(T_{10})}{S(mr_0^2)}. \qquad (2-27)$$

由此，从（2—21）式即可求得包体阶段的持续时间：

$$\tau_{d0}=\frac{1}{\alpha}\ln\left\{\left[\frac{R^2h}{r_2^2h_2}\left(1-\frac{\widetilde{N}_0}{\widetilde{N}(T_{10})}\right)+\frac{\widetilde{N}_0}{\widetilde{N}(T_{10})}\right]\cdot\frac{S(mr_0^2)}{S(mr_2^2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\alpha\frac{R^2h}{r_2^2h_2}+b\right). \qquad (2-28)$$

取$\frac{S(mr_0^2)}{S(mr_2^2)}=2.5$，求得$\widetilde{N}_0$，$\widetilde{N}(T_{10})$后即可对$q_1=1$，$q_2=0$及1分别求得：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{d0}&=\frac{1}{\alpha}\ln\left(1.765\frac{R^2h}{r_2^2h_2}+0.735\right) & q_1=1,\ q_2=0\\ \tau_{d0}&=\frac{1}{\alpha}\ln\left(0.501\frac{R^2h}{r_2^2h_2}+1.999\right) & q_1=1,\ q_2=1\end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

取二者平均即得：

$$\tau_{d0}=\frac{1}{\alpha}\ln\left(1.133\frac{R^2h}{r_2^2h_2}+1.367\right). \qquad (2-29a)$$

若我们近似取$mr_2^2=4$，从而定得$m=\frac{4}{r_2^2}$（r_2为包体的最终半径，也可看成“震源”区的短半轴），则当取$s(mr_0^2)\approx1$时，有：

$$\phi_0=\widetilde{N}(T_{10})=\begin{cases}1.70N_0, & q_1=1,\ q_2=0;\\ 1.0235N_0, & q_1=1,\ q_2=1.\end{cases}$$

为了确定系数α，我们假定包体阶段开始时裂隙发展速度与扩容阶段终了时相同，即：

$$\dot{\phi}\big|_{t=0}=\alpha\phi\big|_{t=0}=\alpha\widetilde{N}(T_{10})=\dot{\widetilde{N}}(T_{10})$$

于是有

$$\alpha=\frac{\dot{\tilde{N}}(T_{10})}{\tilde{N}(T_{10})}=\frac{\left(\frac{4}{R^2}+\frac{8q_2}{\pi R^2}+\frac{\pi R_2}{h^2}\right)q_1\zeta N_0}{\tilde{N}(T_{10})}. \qquad (2-30)$$

在$q_1=1$和$q_2=0$、1的情况下

$$\alpha=\begin{cases}\frac{16.235}{R^2}, & q_1=1,\ q_2=0;\\ \frac{11.528}{R^2}, & q_1=1,\ q_2=1.\end{cases}$$

将二者平均得：$\alpha=\frac{13.881}{R^2}$.

在上述讨论中，当R的单位取成公里，时间单位取成天时，α的单位应为$1/公里^2$。

3.圆柱状孕震区的流体扩散过程

包体阶段之末，扩容体内的流体呈未饱和状态，孔隙压力下降，在扩容强烈时，孔隙压力可趋于零；一旦裂隙扩张停止，流体的渗透作用就突出出来，扩散阶段开始。圆柱状孕震区后二阶段的过程可用以下定解问题来表示：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}=C_1\Delta P,\\ &P(r,\phi,z,0)=0,\\ &P|_\Sigma=P_0,\end{aligned}\right\} \qquad (2-31)$$

式中P为瞬间压力，C_1为水力学系数，Σ为圆柱表面。

边界条件可表示成三部分：

$$P(R,\phi,z,t)=P_0,$$
$$P(r,\phi,o,t)=P_0,$$
$$P(r,\phi,h,t)=P_0$$

设$P=P_0+W$，且在柱坐标下讨论，则（2—31）化为定解问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{C_1}\frac{\partial w}{\partial t},\\ &w(r,\phi,z,o)=-P_0,\\ &w(R,\phi,z,t)=0,\\ &w(r,\phi,h,t)=0,\\ &w(r,\phi,o,t)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2-32)$$

用分离变量法求解此方程组，即得：

$$P=P_0-\sum_{1,m}\frac{2P_0[1-(-1)^m]}{m\pi\lambda_{01}J_1(\lambda_{01})}J_0\left(\lambda_{01}\frac{r}{R}\right)\cdot\sin\frac{m\pi z}{h}\cdot e^{-c_1\left\{\left(\frac{\lambda_{01}}{R}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t}$$

其中λ_{01}是第一类零阶贝塞尔函数的零点，$\lambda_{01}=2.4048\approx2.4$，$\lambda_{02}=5.5201\approx5.5$，$\lambda_{03}=$

8.6537≈8.7…….

于是可求得

$$P=P_0-\sum_{l;m}\frac{2P_0[1-(-1)^m]}{m\pi\lambda_{0l}J_1(\lambda_{0l})}J_0\left(\lambda_{0l}\frac{r}{R}\right)\sin\frac{m\pi z}{h}\cdot e^{-c_1\left\{\left(\frac{\lambda_{0l}}{R}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t},$$

而整个圆柱内压力的平均值则为：

$$\overline{P}=P_0-\frac{4P_0}{\pi^2}\sum_{l;m}\frac{[1-(-1)^m]^2}{m^2(\lambda_{0l})^2}\cdot e^{-c_1\left\{\left(\frac{\lambda_{0l}}{R}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t}, \quad (2—34)$$

由文献[2]，当$\overline{P}=0.75P_0$时求得的t即为扩散阶段和失稳过渡阶段时间的和。于是有：

$$\sum_{l;m}\frac{[1-(-1)^m]^2}{m^2(\lambda_{0l})^2}\cdot e^{-c_1\left\{\left(\frac{\lambda_{0l}}{R}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2\right\}t_{01}}=\frac{\pi^2}{16}. \quad (2—35)$$

显然，由于问题是轴对称的，故和ϕ无关。此外；在打开m时还可发现，只有m＝1、3、5、7、………的项才有非零值，其余项均为零值；在（2—35）式的各展开项中，l越大的项其值越小，m也如此，且每项相对于前项衰减得很厉害。故在取一项而略去高次项的情况下，可求得时间：

$$t_{01}=\frac{0.12}{c_1\left\{\left(\frac{2.4}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{h}\right)^2\right\}}\cdot\frac{10^{10}}{24\times60\times60}, \quad (2—36)$$

其中C_1以厘米/秒为单位，按[8]可取$C_1=1\times10^4$厘米/秒^2，R、h用公里作单位，t_{01}用天作单位。

流体重新进入裂隙后所发生的现象之一，即失稳过渡阶段的物理细节被包含在上述t_{01}的时间进程内，流体的重新进入裂隙不一定引起地震，有关这方面的细节，不拟在此详细讨论。

三、波速异常时空特征量的理论解释

利用前述孕震的数理模式，可以较好地解释波速异常的一些主要时空特征量。为了进行计算和比较，需对有关参数作一些说明。首先，对于震级不同的地震，系数m的取值应相同。经验结果表明，对M＝7.5取$mr_2^2=4$可给出较满意的结果，因为此时$S(mr_2^2)$已达到约等于0.4的极小值。对于更大震级的地震，也可取$S(mr_2^2)\approx0.4$。由M＝7.5定出m值后，便可通过计算法或查图法（见图4）定出其它不同震级对应的$S(mr_2^2)$，然后求出$\ln\frac{S(mr_0^2)}{S(mr_2^2)}$，此处仍取$S(mr_0^2)=1$。由地壳的物理概念可知，充满裂隙的包体不可能插入地壳深处，故r应取较小的值。经验表明，若取r＝20公里，则所得理论结果与实际观测资料符合较好。至于取$R=\frac{h}{3.5}$，在物理上也是相当合理的，因为实际资料表明，孕震区在地面上的投影近似呈椭圆形，长短轴之比约为2，本文中取的投影则为矩形，和椭圆相比，

在面积大致相等而宽度等于 2 倍短轴时，长度应稍小于椭园长轴的二倍，故$\frac{h}{R}=1.8<2$是合理的。计算结果也表明，此时计算的时间和观测值吻合最好。由表 1 便可以看出二者符合得较好。

通过计算与对比，我们得出了以下几点初步认识：

1.选取圆柱形孕震体，用前边讨论的数理模式可以相当满意地解释实际中观测到的波速异常现象。从理论上论证了孕震区长短轴之比接近 2 ∶ 1；孕震区长轴方向与断裂带方向大致相符；孕震区最大线度l与震源区最大线度L之比基本符合〔10〕中的经验关系式；孕震时间T与l或L的关系不完全呈$T\sim l^2$或$T\sim L^2$关系，而符合〔10〕给出的经验关系等等。

圆柱形孕震体对应的理论孕震时间与波速异常持续时间的实际观测数据的对比

（$h=3.5R$，$h:2R=1.8:1$）　　　　**表 1**

震　　级 M_s	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
h = l（公里）	75	107	150	210	300	420
R（公里）	21	30	43	60	86	120
$h_2=L$（公里）	6.5	11	19	33	58	100
l/L	11.5	9.7	7.8	6.3	5.2	4.2
扩容时间 T_{10}（天）	14	27	56	109	223	438
包体时间 τ_{do}（天）	65	159	391	910	2217	5352
扩散与失稳时间 t_0（天）	97	192	389	763	1557	3052
总孕震时间 $T_{理}$	5.8月	12.4月	2.3年	4.8年	10.9年	24.1年
波速异常持续时间 $T_{实}$（据〔9〕）	5.6月	12.6月	2.3年	5.3年	11.7年	24.8年
$\lvert\delta_T\rvert=\lvert T_{理}-T_{实}\rvert$	0.2月	0.2月	0	0.5年	0.8年	0.7年
$\lvert\delta_T\rvert/T_{实}$	4%	2%	0	9%	7%	3%

说明：表中波速异常的总持续时间取自文献〔9〕，孕震区长度h = l与包体长度（震源区长度）$h_2=L$及它们的比值取自文献〔10〕，扩容、包体、扩散、失稳各阶段的持续时间均由前边讨论的公式算得，$R=\frac{h}{3.5}$

2.在数理模式中，圆柱形孕震体更接近实际。它假定扩容区必须与某一初始破裂带相联系，亦即地震有一定的构造背景。此外不同震级的地震，其裂隙丛生区（包体）的内部状态及厚度可能大体相似，只是在长度上有所差异，这样也可以解释为什么同一断裂的同一地段上可能发生震级相差较大的地震。

利用关系式（2—16）可以模拟多种不同的裂隙分布条件，当q_1、q_2取不同值时，对应的孕震时间可能有些差别，比值$\frac{h}{R}$也是如此。因此，对于具体的某一次地震也可选取更适宜的q_1、q_2值以及比值h/R。

四、孕震介质中的地震波传播特性与波速异常的幅度。

孕震区内大量微裂隙的出现及地下流体分布状态的改变是导致震前出现波速异常的主要

原因。这种含裂隙的岩石可近似用两相（固体结构和孔隙流体）或三相（固体结构、孔隙液体及气体）介质来模拟。对多相介质性质的研究主要有两种途径。第一种是：对每一个元素分别写出其本构规律及运动方程，然后在统一联系中求解（如〔11〕、〔12〕）；第二种途径是用种种不同方法求出多相复合介质的等效弹性模量，然后计算等效波速（如〔13〕、〔14〕）。这里我们试图用两相介质模拟孕震区内的地壳介质，并通过相应的估算来研究波速异常的幅度。

设元素1为岩石中固体结构本身，元素2为孔隙流体或其它软弱成分，则两相弹性介质的胡克定律可表示如下：

对于元素1有

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_i^{(1)} = -\alpha_2 + \lambda_1 \mathrm{div}\,\vec{u}^{(1)} + 2\mu_1 \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} + \lambda_3 \mathrm{div}\,\vec{u}^{(2)}, \\ &\tau_{ij}^{(1)} = \mu_1\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i}\right) = \tau_{ji}^{(1)},\quad x_i \neq x_j \quad ; \end{aligned}\right\} \qquad (4-1)$$

对于元素2有

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_i^{(2)} = \alpha_2 + \lambda_2 \mathrm{div}\,\vec{u}^{(2)} + \lambda_4 \mathrm{div}\,\vec{u}^{(1)} \quad , \\ &\tau_{ij}^{(2)} = \tau_{ji}^{(2)} = 0, \qquad x_i \neq x_j \quad ; \end{aligned}\right\} \qquad (4-2)$$

式中λ_1、λ_2、λ_3、λ_4、μ_1为相应的弹性模量，并有$\alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4$，$u^{(k)}$为元素k的位移矢量，$u_i^{(k)}$为其在$x_i$方向上的分量，$\sigma_i^{(k)}$为元素k在$x_i$方向上的正应力，$\tau_{ij}^{(k)}$为其在$x_i$方向上沿$x_j$方向的剪应力。以应力表示的运动方程为：

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i \frac{\partial \sigma_{ji}^{(1)}}{\partial x_i} - N_j = \rho_{11}\frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 u_j^{(2)}}{\partial t^2} \\ &\sum_i \frac{\partial \sigma_{ji}^{(1)}}{\partial x_i} - N_j = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 u_j^{(2)}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4-3)$$

式中 $N_j = \frac{\alpha_2}{\rho}\left[\rho_1 \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{div}\,\vec{u}^{(2)} + \rho_2 \frac{\partial}{\partial x_j}\mathrm{div}\,\vec{u}^{(1)}\right]$

据〔11〕，ρ_1、ρ_2、ρ_{11}、ρ_{12}、ρ_{22}、ρ具有密度量纲，且由下式确定，

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \rho_1 + \rho_2,\ \rho_1 = (1-\phi)\rho_s,\ \rho_2 = \phi\rho_f \quad , \\ &\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12},\ \rho_2 = \rho_{12} + \rho_{22},\ \rho_{12} < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4-4)$$

此处ρ_s、ρ_f分别表示固体及流体作为独立元素本身的密度，ϕ为孔隙度。

引入位移场的标量势φ_j和矢量势$\vec{\psi}_j$，可把上述方程简化为波动方程：

$$\left.\Delta\varphi_j = \frac{1}{a_j^2}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2}, \qquad \Delta\psi_j^{(i)} = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 \psi_j^{(i)}}{\partial t^2},\ (j=1,\ 2)\right\} \qquad (4-5)$$

相应的纵波速度a_j可由下式定出：

$$a_j^2 = \frac{A_1 + \beta_j B_1}{\rho_{11} + \beta_j \rho_{12}} = \frac{B_2 + \beta_j A_2}{\rho_{12} + \beta_j \rho_{22}} \quad ,\ (j=1、2) \qquad (4-6)$$

式中β_j为以下二次方程的两个根：

$$(B_1\rho_{22}-A_1\rho_{12})\beta_j^2+(B_1\rho_{12}+A_1\rho_{22}-A_2\rho_{11}-B_2\rho_{12})\beta_j+$$
$$+A_1\rho_{12}-B_2\rho_{11}=0; \tag{4—7}$$

而横波速度则可由下式确定：

$$b^2=\frac{\rho_{22}\mu_1}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2} \tag{4—8}$$

（4—6）、（4—7）中的A_1、A_2、B_1、B_2均可由两相介质的弹性参量来表示，即：

$$A_1=\lambda_1+2\mu_1-\frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}, \qquad B_1=\lambda_3-\frac{\alpha_2\rho_1}{\rho},$$

$$A_2=\lambda_2+\frac{\alpha_2\rho_2}{\rho}, \qquad B_2=\lambda_4+\frac{\alpha_2\rho_1}{\rho}.$$

下面我们就来讨论参量λ_1、μ_1、α_2等的实际测定方法。

理想可压缩流体的平衡方程、状态方程及连续方程分别为：

$$\sigma_f=(-p)=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \tag{4—9}$$

$$p=A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n+B, \tag{4—10}$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho_0\frac{d}{dt}\mathrm{div}\,\vec{u}=0 \tag{4—11}$$

由（4—10）、（4—11）得：

$$p=p_0+An\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)=p_0-An\,\mathrm{div}\,\vec{u} \tag{4—12}$$

将（4—12）代入（4—9），与（4—2）对比可得：

$$\lambda_f=A\cdot n \tag{4—13}$$

在地面条件下，若对于水取$p_0=1$大气压，$\rho_0=1$克/厘米^3，则$A=3070$大气压，$n=7$；对空气可取$\rho_0=0.00125$克/厘米^3，$A=1$大气压，$n=1.4$。

α_2可由下列条件求得：当$\phi=1$（无固态）时$\alpha_2\to(-p_0)$，当$\phi=0$（无液态）时应有$\alpha_2\to0$，这样便可从（4—1）、（4—2）导出：

$$\alpha_2=\lambda_3-\lambda_4=-p_0\phi \tag{4—14}$$

据〔15〕可知，三维随机分布的含孔隙介质中的纵、横波速度可表示为：

$$a=(1-k_3\phi)a_s,\quad b=(1-k_1\phi)b_s. \tag{4—15}$$

对比后便可近似得出：

$$\lambda_1\approx(1-\phi)(1-k_2\phi)^2,\quad \mu_1=(1-\phi)(1-k_1)\phi^2; \tag{4—16}$$

式中$k_2=1/k_3$。当泊松比为0.25时，$k_1=0.478$，$k_2=1.348$，$k_3=0.768$.

在两相介质情况下，由于：（1）当无流体相存在，即$\phi\to0$时，应有$\lambda_3\to0$，$\lambda_1\to\lambda_s$，$\mu_1\to\mu_s$；（2）当无固体相存在，即$\phi\to1$时，应有$\lambda_4\to0$，$\lambda_2\to\lambda_f$；（3）若$\lambda_f=\lambda_s$，则有$u^{(1)}=u^{(2)}$，$p_0=0$，$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$应等于$\lambda_s$；故在考虑（4—16）后把$\lambda_2$、$\lambda_3$、$\lambda_4$取成：

$$\lambda_2=[1-(1-\phi)(1-k_2\phi)^2]\lambda_f;\quad \lambda_3=\sqrt{\lambda_1\lambda_2}-\phi p_0;\quad \lambda_4=\sqrt{\lambda_1\lambda_2}. \tag{4—17}$$

表2给出用上述公式得到的含裂隙介质中地震波速度及速度比的一些理论计算结果。这些结果表明，随着孔隙度ϕ的增加，纵波速度a、横波速度b及波速比a/b都减小，並且a比b减小得迅速，这与实际观测结果相符。从实际观测到的最大异常幅度（波速比约下降5—6%，纵波速度约下降10%）来看，大约对应着孔隙度$\phi=0.1\sim0.15$。白水饱和介质的计算结果可知，当含裂隙介质进入水饱和状态时，波速及波速比都要回升，这可能对应着流体扩散阶段。若取$\rho_{12}<0$，则波速及波速比略有减小；在ϕ相同的情况下，地下深处的水可能对应着更大一些的波速及波速比。

表2　　含裂隙介质中地震波速及速度比的理论计算结果

（a）干燥裂隙介质

孔隙度 ϕ	0.01	0.05	0.1	0.2
纵波速a（公里/秒）	5.838	5.649	5.427	4.995
横波速b（公里/秒）	3.383	3.310	3.229	3.067
波速比 a/b	1.726	1.707	1.681	1.629

（b）水饱和裂隙介质（孔隙度$\phi=0.1$）

孔隙水情况	地面水 $\rho_{12}=0$	地面水 $\rho_{12}=-0.03$	地下水 $\rho_{12}=0$
纵波速a_1（公里/秒）	5.648	5.593	5.973
横波速 b（公里/秒）	3.229	3.214	3.229
波速比 a_1/b	1.749	1.740	1.850
第二纵波速a_2（公里/秒）	2.141	2.042	0

（注）：对固体元素取$\rho_2=2.9$克/厘米^3，$\lambda_s=\mu_s=3.335\times10^5$大气压，$a_s=5.9$公里/秒，$b_s=3.39$公里/秒，$a_s/b_s=1.735$。

地面水的参数取$\lambda_f=2.149\times10^4$大气压，$\rho_0=1$大气压，$\rho_f=1$克/厘米^3；

地下水的参数取$\lambda_f=8.2\times10^3$大气压，$\rho_0=95$大气压，$\rho_f=0.7$克/厘米^3（对应着约15公里深处）[7]

五、讨　　论

孕震过程极为复杂，本文只考虑了几个主要因素，而影响波速变化的各种因素不可能一一加以讨论。

为了定性探讨某些因素对孕震过程或波速异常的影响，我们可使用简单的量纲分析与相似理论方法。设地震孕育过程中可能影响到扩容裂隙密度N的因素有：增大了的构造应力σ，孔隙压P，岩石弹性模量λ、E，密度ρ，初始裂隙密度N_0，裂隙扩展系数ζ，地壳厚度H，……等等，即有：

$$N=F(\sigma,\ p,\ \lambda,\ E,\ \rho,\ N_0,\ \zeta,\ H,\ \cdots\cdots) \qquad (5-1)$$

各参量的量纲如下：

$[\sigma]=[p]=[\lambda]=[E]=ML^{-1}T^{-2}$；$[\rho]=ML^{-3}$；$[\zeta]=T^{-1}L^2$；$[H]=L$；………

在这些主定特征量中选三个量纲独立的特征量，如选σ、ρ、ζ，然后利用π—定理可得出以下无量纲关系式：

$$\frac{N}{N_0}=F\left(\frac{p}{\sigma},\ \frac{\lambda}{\sigma},\ \frac{E}{\sigma},\ \frac{H}{\left(\frac{\zeta^2}{\sigma}\rho\right)^{\frac{1}{2}}},\ \cdots\cdots\right). \qquad (5-2)$$

由（5—2）式可见，为了得到同样的裂隙密度比$\frac{N}{N_0}$，当地壳介质的λ、E较大（介质较致密时），所需的构造应力也应较大；在其它条件相同时，孔隙压愈大，所需的构造

应力也愈大；在其它条件一样的情况下，地壳愈厚，所需的构造应力愈小，因而也就愈容易观测到波速异常，这也许就是中国西部地区及苏联中亚地区（H≥50公里）容易观测到波速异常，而美国某些地震区（H在30公里左右）不易观测到波速异常的一种可能的原因。

本文所讨论的震源孕育数学物理模式及相应的公式也可用来解释其他地震前兆的时空分布特性，具体作法完全类似。

参　考　文　献

〔1〕B. T. Brady, Theory of Earthquakes, I. A Scale Independent Theory of Rock Failure, Pure and Applied Geophysics, Vol.112, №.4, 1974.

〔2〕D. L. Anderson and J. H. Whitcomb, The Dilatancy-Diffusion Model of Earthquake Prediction, Proceedings of the Conference on Tectonic Problems of the San Andreas Fault System, 1973, P417—425.

〔3〕M. A. Biot, General Theory of Three-Dimensional Consolidation, Journal of Applied Physics, Vol.12, 1941, P155—164.

〔4〕L. U. Desitter, Structral Geology, 1956. 中译本：构造地质学，张文佑译，1964.

〔5〕W.F.Brace, Dilatancy-Related Electrical Resistivity Changes in Rocks, Pure and Applied Geophysics, Vol.113, 1975, p207—217.

〔6〕A. E. Scheidegger, Principles of Geodynamics, 1963, 2nd Ed.

〔7〕S. K. Garg D., H.Brownell, Jr., and J. W.Pritchett, Dilatancy-Induced Fluid Migration and Velocity Anomaly, JGR, Vol.82, №. 5, 1977.

〔8〕T. Rikitake, Dilatancy Model and Empirical Formulas for an Earthquake Area, Pure and Applied Geophysics, Vol.113, №1—2, 1975.

〔9〕冯德益等，我国西部地区一些强震及中强震前后波速异常的初步研究（一）—波速比异常，地球物理学报，19卷 3 期，1976.

〔10〕冯德益等，我国西部地区一些强震及中强震前后波速异常的初步研究（二）—波速异常区及其特性，地球物理学报，20卷 2 期，1977.

〔11〕Biot, M.A., Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Solid, J. Acoust.Soc.Am., Vol.28, p162, 1956.

〔12〕N.Г.Филиппов, Б.М.Бахрамов, Волны в упругих однородных и неоднородных средах, «ФАН», Ташкент, 1978.

〔13〕Kuster, G. T. and M. N. Toksoz, Velocity and Attenuation of Seismic Waves in Two-Phase Media, Part 1, Geophysics, Vol.39, №.5, 1974.

〔14〕J. Pater Watt, et al., The Elastic Properties of Composite Materials, Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol.14, №.4, 1976.

〔15〕Sato I., Velocity of Elastic Waves Propagated in Media with Small Holes, Bull.Tokyo Univ.Earthquake Res. Inst., Vol. 30, №. 3, 1952.

〔16〕林命周等，流体（水）在孕震过程中的作用，地球物理学报，24卷 3 期，1981.

A PHYSICAL—MATHEMATICAL MODEL FOR THE EARTHQUAKE PREPARATORY PROCESS AND THE THEORETICAL EXPLANATION OF PREMONITORY SEISMIC VELOCITY ANOMALY

Feng Deyi (*Seismological Institute of Lanzhou*)
Lin Mingzhou (*Shanghai Seismological Bureau*)
Gu Jinping (*Seismological Institute of Lanzhou*)

Abstract

In this paper, a physical-mathematical model for the earthquake preparatory process is suggested.According to this model, such process include four stages; dilatation, formation and development of inclusion, fluid diffusin and preseismic instability stages. These stages of the earthquake preparatory process in a cylindrical region along the fault are researched by the method of mathematical physics The computational formula of the duration of every stage is derived from investigqting these subprocesses. The computational results are in agreement with the empirical data of premonitory seismic velocity anomaly.

The problem about velocities of seismic waves in the two-phase media is theoretically studied.The computational formulas of the P, S wave velocities and the velocity ratio are given. Some quantitative results are obtained.

Based on the described results some characteristics of the seismic velocity anomaly before earthquakes, namely, the duration of anomaly, the form and dimension of anomalous region and the amplitude of anomaly, are theoretically explained.

Finally, some factors affecting velocity anomaly are briefly discussed by means of dimensional analysis and analogous theory.