

地球流体力学的研究与进展^{*}

穆 穆 季仲贞 王 斌 李 扬

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

摘 要 简要介绍中国科学院大气物理研究所七十多年来在理论与计算地球流体力学方面的若干研究及其新的进展。在理论地球流体力学方面, 介绍了长波动力学及线性稳定性问题、弱非线性理论及行星波动力学以及用 Arnold 方法(能量-Casimir 方法)研究大气和海洋中各种流体运动的非线性稳定性问题的成果。此外, 对扰动演变、扰动和基流相互作用及热带大气动力学中的第二类不稳定条件(CISK)也作了简要的介绍。在计算地球流体力学方面, 主要内容包括: 用物理观点和数学分析相结合的方法阐述了造成计算紊乱和计算不稳定的机理, 论证计算稳定性、算子非负性和能量守恒性之间的密切关系, 对国际上流行的瞬时能量守恒的格式找到非线性计算不稳定的特解; 设计出一批内部协调并且具有完全总能量守恒的差分格式(包括隐式的、显式的和高精度的), 发展了多种经济省时算法等等。此外, 对近年来新发展的总能量守恒的半拉格朗日格式, 多守恒格式及辛几何算法重点作了介绍。

关键词: 地球流体力学; 稳定性与不稳定性; 总能量守恒; 辛几何算法; 经济算法

1 引言

中国科学院大气物理研究所建所 75 年来, 科研人员在理论流体力学及计算流体力学的研究方面, 做出了重要的贡献, 取得了令人瞩目的成果, 一些研究工作在国际上处于领先地位, 有些是开创性的。由于作者学识与水平有限, 本文仅简单介绍 75 年来大气物理所在理论流体力学及计算流体力学两方面所取得的若干主要成果。

2 理论地球流体力学部分

2.1 概述

地球流体力学将地球上的流体(主要指大气与海洋)作为一个整体进行研究, 它的主要任务是弄清地球流体运动的基本规律。大气和海洋运动的稳定性与不稳定性问题是地球流体力学的中心问题之一。大气和海洋的波动可以归因于无波动的基本动力状态对扰动的不稳定性而各种波动常常在某些条件下产生和发展, 在另一些条件下受到抑制和阻尼。大气环流的演变, 中纬度气旋和反气旋的发生、发展和消亡, 月或季平均图上的大尺度异常环流持续性发展和维持, 阻塞的形成, 维持与崩溃, 气候对冰

2003-01-03 收到, 2003-03-17 收到修改稿

^{*} 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040901-1 和 G1999032801 以及中国科学院知识创新项目 KZCX2-208 共同资助

盖、海面温度等物理因子的敏感性,低频振荡等等,这些现象都与扰动或波动的动力不稳定有关。此外,随着大气科学的迅速发展,许多重要的国际前沿课题,如气候的变化与预测、全球变化等等,也都需要从动力稳定性方面去进行理论探讨。因此,这一领域的研究,对数值天气预报的发展及气候变化与预测的研究具有重要的意义。

由各种波组成的扰动按照它们的特征振幅与基本气流的特征尺度的比,分为小振幅扰动和有限振幅扰动。不稳定发展可以归咎于基本气流和扰动的相互作用(波流相互作用),或各种扰动之间的相互作用(波波相互作用)。本部分介绍理论地球流体力学方面的有关研究进展,其中包括长波动力学的建立,线性稳定性研究中的标准模方法及连续谱问题;行星波动力学,弱非线性方法及波包理论;用 Arnold 方法研究大气和海洋中各种流体运动的非线性稳定性问题,如:二维准地转模式,多层准地转模式、三维准地转模式的非线性稳定性问题以及对称稳定性问题和 Modon 稳定性问题;此外,对扰动演变的一般性问题;扰动和基流相互作用问题;热带大气动力学中的第二类不稳定条件(CISK)作了简要的介绍。由于内容较多,本部分按大概的时间顺序及所用的工具方法逐步介绍,分为线性稳定性理论和波包理论、弱非线性理论和行星动力学以及非线性理论三个部分。

2.2 线性稳定性理论和波包理论

地球流体力学属于流体力学、大气科学和海洋科学的交叉领域,是在物理学、数学基础之上发展起来的,由于数学发展水平的限制,关于地球流体稳定性的研究是从其线性化理论开始的。早在在上世纪初,科学家就把天气系统的发展归结为运动的不稳定性问题, Rossby^[1]首先利用二维无辐散模式的线性化一维扰动涡度方程,并设科里奥利力沿经圈方向的切变为常数,得到了有名的长波(槽线)的移动公式。在这一简化的模式中,没有考虑基本气流的切变,因而得到扰动振幅不随时间变化亦即没有发展的结论。Kibel^[2]应用三维斜压流体动力学方程,取地转风为零级近似,再按小参数(Kibel Rossby 参数)展开,推得了当时形式下的准地转模式,其中地面气压随时间的变化恰好由温压场的相交所决定,这就是有名的气压变化的平流动力理论,并用以计算地面气旋的演变。赵九章^[3]则把高空长波系统作为二维斜压流体运动来处理,取基流为常数,但考虑了基流的南北向温差,在这样的基流上叠加小扰动,并取扰动为二维不可压缩和二维波状形式,由于有斜压过程,结果得到绝对涡度不守恒,当扰动波长短于某个临界波长时变为不稳定,因而得到扰动能够发展。同时还据此解释高空的准定常槽脊(“半永久性活动中心”)的形成。

郭晓岚^[4]将标准模(Normal Mode)方法应用到气象学,得到了正压大气不稳定的经典性理论。Charney^[5]和 Eady^[6]考虑斜压性对不稳定的影响,用标准模方法得到了相应的斜压不稳定判据。郭晓岚^[7]又将自己的理论推广到准地转三维斜压模式中,取基流具有垂直切变(但略去水平切变),即研究所谓纯斜压不稳定问题,改进了 Charney^[5]基流垂直切变为常数(从而导致风速可以达到无穷大的不合理现象)的假定,得到有最不稳定的波长,更接近天系统实际的发展。以郭晓岚的理论为基础,伍荣生^[8]进一步将地形影响引入到扰动方程中,研究既具有基流切变又具有地形影响情况下的扰动不稳定性问题,由此得到不稳定的必要条件判据、扰动移速以及不稳定发展率的上下限估值。在实际情况下,基流往往是非平直的,叶笃正^[9]首先研究了基流是行星

波的问题，他取正压无辐散大气模式，将扰动沿东西方向和南北方向都展成 Fourier 级数，截取有限项而求解小扰动方程。由于基本气流是波状的，基本气流总是与扰动有相互作用，因而极易出现不稳定现象，特别有意义的是不稳定的发展型扰动的结构与观测到的发展型槽，例如高空疏散槽十分吻合。

以上研究中，关注在什么条件下，扰动随时间增长。另一个问题是扰动是如何发展的，即扰动演变问题。扰动演变问题不仅包括扰动的位移，而且包括扰动的变形，发展和衰减等。Rossby^[10]首先研究扰动演变的问题，之后，叶笃正^[11]仔细地研究了线性化正压大气的扰动能量频散问题，取扰动是局地性的，例如一个孤波，则由于存在着能量频散，孤波会变形，在一定条件下能量向上游传播从而导致上游出现新槽脊。此外，叶笃正还通过频散效应解释了上游涡度的注入导致下游出现一个个新的槽脊，即所谓上游效应。在标准模方法中，假设扰动为标准模的形式，不稳定扰动成指数增长，这在实际天气中是不可能的。研究表明如果将高空天气图分解为基流和扰动两部分，扰动场和标准模相差甚远，但扰动场可以表示为许多波包的叠加，每个波包都带局地性质，它由个别的槽或脊或者至多一、二对槽脊所组成。为了更准确地揭示高空天气系统（槽脊和长波系统）的演变过程的规律，曾庆存^[12]和卢佩生等^[13]提出了波包理论，找准地转模式的线性化方程，将设扰动为波包，得到了扰动的移速、波幅变化、波长变化和扰动轴线（即槽脊线）随时间演变的一系列方程。他们的主要结果是：在正压大气情况下，急流南边的导式槽脊及急流北边曳式槽脊是发展的，而急流南边的曳式槽脊及急流北边的导式槽脊是衰弱的；在斜压大气情况下，高空急流以下沿高度后倾和急流逐渐变小，波长变长；衰弱型扰动中心移离急流轴，且扰动轴线倾斜逐渐变大，波长变短。在三维情况下扰动发展与否视正压效应和斜压效应的叠加来决定，例如急流下和处于急流南边的导式和沿高度后倾的槽是正压和斜压都发展的，因而有最强的发展，在水平和垂直方向的波长都变大，很快变成一个大槽。还有，若基流是稳定的，则初始为发展型的扰动，经历着由发展到中性到衰弱，轴线倾斜逐渐变小到无倾斜然后反向倾斜且逐渐加大的全过程。所有这些都和天气预报的经验很好地吻合。

由于标准模是不完备的，因此必须考虑连续谱的作用。卢佩生等^[14]和张明华^[15]注意到波包和由连续谱组成的扰动的关系，他们计算了和连续谱对应的谱函数，结果是这些谱函数的结构与标准模绝然不同，具有局地性，和波包十分类似。张明华还把实际的高空天气图按由标准模和连续谱函数所表示的完备基底展开，结果得到振动能量的 80% 以上为连续谱函数所组成的扰动所组成，由标准谱所组成的扰动的能量不到扰动总能量的 20%。由此可见连续谱和波包表示法的重要性。

扰动的演变也必定使基流发生变化，连续谱和波包理论还在研究扰动和基流的相互作用中取得了成功。扰动向带状环流反馈能量常常被解释为带状基流的不稳定机理，即基流满足不稳定条件时，随时间作指数衰减的标准模持续地向带状基流反馈能量和角动量^[16]。而当带状基流是稳定的，则所有标准模都是中性的，或者即使基流满足不稳定的必要条件判据也可能存在个别的中性标准模，但和每个中性标准模对应的扰动都与基流无相互作用的（在无源、汇的大气中），因而不可能加速或减弱带状环流，亦即所谓无加速定理^[17]。这些理论不能解释实际大气中何以扰动向带状基流反馈能量，因为这些理论忽略了连续谱（即波包），而恰恰是连续谱扰动占实际大气中扰动的绝大

部分,而且也最有效地沿经圈输送角动量和感热。按张明华^[15]和任舒展等^[18,19]的计算,角动量输送的80%以上以及感热输送的大部分都是由于与连续谱对应的扰动所完成的。

此外,在湿大气动力稳定性方面,李崇银^[20]讨论了有垂直风切变情况下由于低层水汽辐合凝结所致的第二类条件不稳定(CISK)问题,得到风切变对湿过程的不稳定有抑制作用的结论。

2.3 弱非线性理论及行星动力学理论

弱非线性理论亦被称为WKBJ法,是1926年温特第尔、克雷皮斯和勃里罗伊等人在解量子力学的薛定谔方程时提出的一种奇异摄动法,1924年杰弗里在研究经典波动问题时,就创立了类似方法,因此,这种方法称为WKBJ法(或WKB法)。此种方法即用刘易斯—格林变换,以及龙格或奥勒乌尔变换来寻求含有参数的微分方程的近似解。为了克服线性理论只适用于小扰动的缺点,Pedlosky^[21]首先把弱非线性理论应用到大气和海洋运动的稳定性问题中,他用WKBJ方法研究了两层准地转模式中边缘不稳定问题,给出了单波扰动发展的预测,特别地给出了扰动振幅的可能最大值,因而实际上也就给出了扰动能量,位涡拟能的最大值估计(即不稳定的饱和问题)。Pedlosky^[22]进一步研究了斜压波的边缘不稳定问题,指出上述理论在边缘稳定曲线上除最小临界切变点外成立,而在最小临界切变点不成立。

20世纪70年代,在研究扰动的演变方面,巢纪平和叶笃正^[23]以及刘式适和杨大升^[24]将叶笃正^[11]的工作推广到基流有切变和扰动为二维或三维的情况,应用WKB方法,他们得到了和高空天气图比较相像的槽脊线结构——螺旋波,求出了其频散关系,并得到螺旋波存在必须与相速满足一定的条件。

在研究扰动和基流相互作用方面,Fjørtoft^[25]首先从理论上研究了正压无辐散大气模式中的能量转换关系。由于总能量和总涡度(涡度的平方)守恒,因此,以能量为权重,则流场的平均波数或平均波长守恒,即平均尺度守恒。若把流场区分为相对的长波(包括平直气流)、中波和短波三部分,则能量只可能或者是长波或短波同时转向中波,或者是中波同时转向长波和短波,这和以往流体实验中所得的湍流情况不同。后来,曾庆存^[26]指出Fjørtoft的波数守恒是指全波数而言的。进一步的分析显示,在东西方向的波数可以不守恒,即允许有能量的单向转移,中波和短波能量可以同时转到长波且最终转到带状环流中来,不过此时南北方向的平均波数必然变大,即南北向特征尺度变小,急流变强变狭,这与实况相符。曾庆存^[12]利用WKB方法讨论扰动和基流之间的能量转换问题。若基流为带状环流,则当振动衰减时,扰动同时向基流反馈能量和角动量(或动量),带状环流加速,急流增强;而当扰动发展时,扰动同时抽取基流能量和角动量(或动量),带状环流减速,急流减弱(但由于扰动能量增加可导致和扰动对应的局地急流增强)。这 and 实际大气情况是相符的,尽管就长期平均而言是扰动滋养西风,那时因为扰动衰减时间持续较长,且在斜压大气中扰动由带状环流所对应的带状温差(它主要由太阳辐散等非绝热因子所致)取得扰动有效位能再转化为扰动动能,使扰动动能有足够的供应,再反馈给带状环流的动能。

叶笃正等^[27]提出了地形与热源是准定常扰动形成的原因,为行星波动力学研究奠定了基础,到了上世纪80年代初,行星动力学已成为国际大气科学的前沿研究课题,黄荣辉等^[28~30]在研究准定常行星波在球面大气中传播的基础上,利用WKBJ方法研究

了准定常行星波在球面大气中传播规律，在行星波动力学研究方面做出了重要工作。黄荣辉等^[30,31]从理论上分析了行星波动力特性，指出 Berger 方程模式的局限性，提出准地转方程模式才能比较准确地描述行星波有动力特性；并且指出由于行星波的垂直传播，应用二层模式来描述行星波有局限性，提出只有多层模式才能正确描述准定常行星波在空间的传播特性。在此基础上，黄荣辉等^[32,33]建立了一个包括粘性、牛顿冷却的准地转 34 层模式，研究了冬、夏北半球准定常行星波的形成，并从实际观测资料计算了准定常行星波的实际分布，两者比较一致，此外还指出冬季高纬度地形（如格陵兰高原）对准定常行星波的形成起了重要作用，而夏季青藏高原及其上空的热源对夏季准定常行星波的产生起着重要作用。随后，黄荣辉等^[28,29,34]利用波动在缓变媒质中传播理论、波的折射指数及 E-P 通量分析了准定常行星波在冬、夏球面三维大气中传播规律，建立了准定常行星波在球面三维大气中传播的两支波导理论；并且指出了由于行星波南北尺度很大，必须考虑科里奥利力随纬度变化，以及在准定常行星波能量输送中必须考虑非地转风分量的贡献，从而正确地证明了球面三维大气准定常波作用守恒以及波的群速度、波作用量和波折射指数之间的关系，并且应用波的 E-P 通量来研究准定常行星波的传播；在研究准定常行星波在球面大气中传播的基础上，利用 WKB 方法研究了准定常行星波在球面大气中传播规律，指出准定常行星波在球面大气实际基流中传播，由于波群速度的散度不等于零，因此波的振幅不一定极向增加。伍荣生^[35]从波作用守恒出发，证明了波数沿群速度传播是守恒的，但由于波具有周期变化，其频率并不守恒。此外，黄荣辉和邹捍^[36]从观测资料分析了准定常行星波传播的两支波导以及准定常行星波传播中波与流相互作用过程。

2.4 非线性稳定性与不稳定性研究

随着非线性科学及大气科学的发展，大气和海洋运动的非线性不稳定问题，即用完整的非线性模式考察空间结构为有限振幅扰动的不稳定问题，越来越受到人们的重视。20 世纪 60 年代中期，Arnold^[37,38]用变分原理和先验估计的方法建立了二维平行流的非线性稳定性判据，从而为研究流体运动的非线性稳定性提供了一个有力的方法。Arnold 的方法基本上是把 Fjørtoft^[39]的方法扩展到非线性的有限振幅的情形，是建立在守恒律的基础上基本气流是守恒泛函的极值。利用能量守恒、广义位涡守恒、边界速度环量守恒以及角动量守恒等守恒量，构造 Hamilton 不变量 H ，即能量—Casimir 的守恒泛函，使得控制方程与 Hamilton 不变量构成一个 Hamilton 系统；而定常态恰是 Hamilton 不变量的一个驻点。对于流体力学中的各种模式，一般，Hamilton 不变量是非典则的，即存在非平凡的 Casimir C 不变泛函，此处 C 是保证 $C+H$ 在平衡点处一阶变分为零。当 $C+H$ 在平衡点处的二阶变分正定或负定时，就称该定常态是形式稳定的 (Formal stability)。对于有限维动力系统，所有范数都是等价的，由形式稳定可以推出非线性稳定性 (Liapunov 稳定)。而对于无限维动力系统，形式稳定性并不隐含非线性稳定性，欲推导非线性稳定性判据，应在平衡点附近对 $C+H$ 进行凸性估计，确定 C 的具体形式，得到相应的条件，再利用 $C+H$ 的时间不变性对扰动进行先验估计，得到该定常态的非线性稳定性判据。Arnold 第一定理对应于守恒泛函的二阶变分是正定的情形，而 Arnold 第二定理对应于守恒泛函的二阶变分为负定的情形。对于 Arnold 第一定理，扰动能量和扰动位能具有上界，扰动的上界也可以被这个上界控制；

对于 Arnold 第二定理, 只是扰动能量和位能的差有界, 要得到非线性稳定性判据, 必须用扰动位能控制扰动动能, 这使问题变得比较复杂, 在数学上, 要用到庞加莱不等式, 而庞加莱不等式严格依赖于区域的几何性质和边界条件。Andrews^[40]指出大气准地转运动 较多地满足 Arnold 第二定理, 这一观点已经被很多科学家验证^[41~45]。

20 世纪 80 年代以来, Arnold 方法才被广泛应用于各种流体运动的非线性稳定性问题的研究中。例如, Abarbanel 等^[46]研究了二维、三维无粘不可压流体运动的非线性稳定性, Holm 等^[47]研究了多层准地转模式及等离子体等问题的非线性稳定性, 等等。

在地球流体力学方面, McIntyre 和 Shepherd^[48]和曾庆存^[49]推广了 Arnold 的第一个工作 (即所谓 Arnold 第一定理), 前者和局地波作用量守恒联系起来; 而后者则取所有的守恒律 (质量守恒、角动量守恒、能量守恒和广义位涡度拟能守恒) 构成泛函, 研究了几乎所有大气模式 (正压准地转模式、斜压准地转模式、正压原始方程模式、斜压原始方程和分层流模式), 找到了相应模式的稳定性充分性判据条件。在曾庆存的工作中, 由于泛函由更多的守恒量构成, 其极值就给出更为广泛的基流——可以是平直气流, 也可以是常定或以常速移动的波状气流。由于边值条件是严格的, 得到了三维地转模式的稳定充分条件的严格判据; 还得到在原始方程中除正压不稳定 (正压模式) 和斜压不稳定 (斜压模式) 外, 还存在惯性不稳定、对称不稳定、超高速不稳定和 Helmholtz 不稳定——这些被称为非地转不稳定。特别是, 用多层模式近似垂直方向为连续变化的斜压模式时, 有可能缩小 Helmholtz 不稳定的存在范围。

另外, 其他研究人员^[50~56]也作了许多工作, 研究了各种流体运动的非线性稳定性, 得到一些有意义的结果。特别应该指出的是, 一些经典的线性稳定性定理 (例如 Rayleigh 拐点定理^[4]、Fjørtoft 定理、Charney-Stern 定理等等) 都可以用 Arnold 方法推广为适用于有限振幅扰动的非线性稳定性判据。

穆穆等^[57~61]和 Liu 等^[62~65]的工作则进一步深化了 Arnold 的第二个工作 (即 Arnold 第二定理)。在这些工作中对二维、多层、三维准地转模式 (球面上的和 β 平面上的), 严格地得到了对应于 Arnold 第二定理的非线性的稳定性充分性条件。另外, 他们还研究了对称稳定性问题、Modon 的非线性不稳定等等。

2.4.1 二维准地转模式

一些作者^[48, 56, 58, 60]应用能量—Casimir 方法建立了相应的非线性稳定性的 Arnold 第一定理, 同时给出了扰动能量和扰动位涡拟能的关于初始扰动的上界估计。穆穆等^[60]还进一步提出了将流函数场按速度环量分解, 克服了前人不能处理边界速度环量非零的局限性, 建立了对应于 Arnold 第二定理的非线性稳定性判据。得到了二维准地转模式非线性稳定性相应的 Arnold 第二定理, 在此情形下, 不仅可以给出扰动能量和扰动位涡拟能的关于初始扰动的上界估计, 而且可以得到下界估计。在满足周期边界条件的特殊情形下, 利用纬向动量守恒定理, 可以将稳定的基本气流的范围扩大。

2.4.2 多层斜压准地转运动

在中高纬, 大多数扰动是由基本气流的斜压不稳定造成的, 由有限个密度均匀但彼此不同的均质流体层所组成的分层模式, 提供了一个介于单层正压模式和连续层结斜压模式之间的有用的中间系统。多层模式十分简单地模拟了斜压效应^[16, 26]。在多层

准地转的非线性稳定性研究方面, Holm^[47] 和曾庆存^[49] 用 Arnold 方法给出了相应的 Arnold 第一定理, 特别是曾庆存首次引入角动量守恒, 得到了一般性的结果, 并以二层模式为例, 讨论分层模式不稳定性的分类和它的机制。一些作者^[51, 57, 66] 对上下边界为固壁的多层模式进行了系统研究, 给出相应于 Arnold 第二定理的一般性结果, 并建立了有限振幅扰动的能量和广义位涡拟能的上界估计。对于经典 Phillips 模式^[67]、Liu 等^[62] 和 Mu^[68] 揭示了最小临切变、短波截断等现象的非线性特征, 通过精细的先验估计, 建立了下述意义下最优的非线性稳定性判据: 若稳定性判据被破坏, 一定存在某一纬向周期通道, 在其中存在指数增长的正规模, 因而是线性不稳定的。Li 等^[69] 讨论了三层广义 Phillips 模式的非线性稳定性, 考虑了速度切变的梯度、自由表面对不稳定的影响; Liu 等^[62] 讨论了更一般的多层模式, 在上下边界既可以是固壁的也可以是自由的、密度跃度和层高也可以是任意的情形下, 得到了非线性稳定性判据。此外, Song 等^[55] 用结构稳定性方法, 同时考虑初始和参数扰动, 也得到了扰动能量和扰动位涡拟能先验估计。

2.4.3 三维斜压准地转模式

对于一般的连续层结准地转流体, McIntyre 和 Shepherd^[48] 首先得到了在均匀边界条件下的非线性稳定性的 Arnold 第二定理, 均匀边界条件是指: 侧边界上扰动环流及上下边界上扰动温度都为零。Mu 等^[59, 70] 研究了非均匀边界条件情形, 他们把整个流体分为均匀和非均匀两部分, 均匀部分可以用庞加莱 (Poincare) 不等式的方法进行估计, 而非均匀部分由边界上 Kelvin 速度环流定理来控制, 从而得到非线性稳定性判据。Liu 等^[64] 利用精细的庞加莱不等式, 得到了此模式最优的非线性稳定性判据。

对于准地转运动中著名的 Eady 模型^[6], 由于其中的基本态不是利用物理守恒量构造的泛函的临界点, 前人未能建立任何非线性稳定性判据。Mu 等^[61] 和 Liu 等^[63, 64] 用扰动位涡拟能守恒克服了这一困难, 建立了最优的 Poicare 不等式 (即利用位涡拟能给出能量的上界估计式, 下同), 理清了非线性稳定与不稳定的物理参数分布区域, 建立了在下述意义下最优的非线性稳定性判据: 若静力稳定性参数与南北方向宽度满足短波截断条件, 则基流是非线性稳定的; 若破坏了该条件, 则一定是线性 (正规模意义下) 不稳定的。

此外, 对于广义 Eady 模型, Lindzen^[71] 用数值方法发现此模式不仅存在通常的“短波截断”现象, 而且存在一个新的“长波截断”现象。Li 等^[72, 73] 研究了此模式的线性与非线性稳定性问题, 在线性情形下得到与 Lindzen^[71] 一致的结果, 同时, 得到了此模式非线性稳定性判据。Liu 和 Mu^[65] 进一步研究此模式的非线性稳定性, 建立了最优的非线性稳定性判据。

2.4.4 非线性对称不稳定性

在地球流体动力学中, 对称是指基本气流和允许的扰动不依赖于某一坐标。对称不稳定是一种斜压不稳定, 在大气中有两种对称不稳定性问题。一个是与中尺度动力学中有关中尺度雨带的形成有关; 另一个是与行星尺度环流有关。

Fjörtoft^[39] 首先研究了无限小扰动的形式对称稳定性问题, 得到了对称稳定的一个充分条件。Xu^[74] 用能量—Lagrange (ELM) 方法将以上结论推广到有限振幅扰动的情形, 此后, Cho 等^[53] 和 Mu 等^[75] 用能量—Casimir (ECM) 方法得到了相似的结论。

Mu 等^[76]同时研究了湿大气的对称稳定性问题。当初始扰动场是“自然”的,即初始扰动的等效位温与对称轴方向的绝对速度不超过基本场的值域时,建立了非线性稳定性判据。该判据条件强于线性的 Formal 稳定性判据条件,揭示了湿对称不稳定问题的复杂性。在经向对称与纬向对称两种情形下,分别考察了地球的自转角速度的北向分量对非线性对称稳定性的影响,揭示了在经向对称情形,该分量对非线性对称稳定性不产生影响;而在纬向对称情形,该分量扮演重要角色。Wu 和 Mu^[77]进一步应用 ECM 方法,构造了精确的 Casimir,得到了与 ELM 方法的结论一致的结果,考察、比较了能量—Casimir 方法与能量—Lagrange 方法在研究非线性对称不稳定问题方面的优点与不足之处。

另一方面,Bowman 和 Shepherd^[78]将 Cho 等^[50]的结论推广到行星环流情形,考虑了地球形状及可压缩性的影响。Mu^[79]在自然坐标系下,即以高度为垂直坐标,得到了此问题的形式稳定性判据,从而推广了前人的工作。

2.4.5 Modon 的非线性不稳定性

McWilliams^[80]首先应用偶极涡描述大气中的阻塞现象,数值结果显示偶极涡在结构、带状风速以及频散关系方面与观测的大气阻塞现象非常吻合。因此 Modon 已经被作为研究大气阻塞现象的模型之一^[80],并且把偶极涡的稳定性与阻塞的维持联系在一起^[81]。Nycander^[81]指出已有文献中关于 Modon 的稳定性的证明是有疑问的,并用数值模拟的方法表明偶极涡在一定条件下是不稳定的。Wu 等^[82]证明了 Modon 在 Liapunov 意义下是不稳定的。

由于 Modon 是非线性不稳定的(在 Liapunov 意义下),我们不能用通常的 Modon 的稳定性概念去解释大气中阻塞的维持现象。另一方面,Modon 的结构稳定性似乎不能恰当地描述大气阻塞的维持,因为它只给出了流型的结构稳定性,并不关心位置;而对于大气阻塞、流型和位置都很重要。但是,这并不意味着阻塞不能用 Modon 来模拟。事实上,从 McWilliams^[80]的工作我们可以看出偶极涡的结构、带状风速以及频散关系与阻塞极其相似。因此,我们应该放弃用通常的稳定性方法去解释大气阻塞维持。Wu 等^[82]提出了 Modon 的生命周期的概念来描述大气阻塞的维持时间。如果偶极涡的生命周期与阻塞维持时间一致,那么 Modon 模式可以用来解释大气阻塞的维持。

2.4.6 锋地转运动的非线性稳定性

针对海洋中锋的斜压性和复杂性,Li 等^[83]和 Vladimirov 等^[84]利用 Arnold 的变分原理与先验估计相结合的方法,应用无限维 Hamilton 系统原理,在一般地形、一般边界和周期通道情形,分别得到了 Arnold 非线性稳定性判据。在周期通道情形,当南北宽度 $2L$ 与东西长度 $2X$ 满足 $L/X > 3/2$ 时,得到了非线性稳定的充要条件。此外,还建立了位涡拟能的传输方程。

2.4.7 扰动发展的非线性饱和问题

叠加在不稳定基流之上扰动的发展、变化与饱和问题,是经典的线性理论难以回答、必须在非线性范畴下研究的重要问题。Shepherd^[50, 51, 85, 86]提出了一个研究饱和问题的新方法,此方法建立在非线性稳定定理基础上。Mu 等^[87]和 Xiang 等^[88]研究了二维准地转模式的饱和问题,得到了扰动能量和扰动位涡拟能的上、下界估计。另一方面,Ishioka 等^[89]用数值方法研究了正压不稳定的饱和问题,显示了 Shepherd 方法得

到的结果的可靠性。对于二层 Phillips 模式，一些作者^[51,86,90,91]分别讨论了扰动能量和扰动位涡拟能的上下界估计，穆穆等人在建立一系列非线性稳定性判据的同时，分别对 β -平面上二维准地转运动、二层 Phillips 模型、非线性对称不稳定模型，也得到了扰动变化的有关信息（如扰动能量、扰动位涡拟能的上界等）。

2.4.8 中高纬纬向流的非线性分析

Mu 等^[45]把 Arnold 非线性稳定性判据应用到中高纬纬向流的维持与破裂的诊断研究上，对于实际大气中的阻塞高压、切断低压和急流，分析了观测的 500 hPa 等压面上流函数与位涡之间的关系。对于大尺度准地转大气，资料表明，随着流函数的增加，位涡减小，这说明在此情形下，Arnold 第二定理更适用。他们的结果表明，稳定的大气纬向流满足相应的 Arnold 第二定理，而不稳定的纬向流不满足相应的 Arnold 第二定理。

3 计算流体力学

3.1 概述

当前，计算地球流体力学主要是研究大气动力学和海洋动力学问题所用的计算方法及其理论，它是一门新兴的边缘学科分支，是在大气动力学、海洋动力学、计算数学和流体力学基础上发展起来的一个交叉学科。它研究的是不同于计算数学中所研究的收敛性、稳定性的一般问题，而是研究在有限格网下的收敛性、稳定性、准确度和计算紊乱的控制等更具实际意义的理论问题和具体方法，并且其对象是极其复杂的地球流体力学方程组。它也不同于一般的计算流体力学，它主要不是研究高速、间断和定常的流体问题，而是着重研究低速旋转的地球流体的演变问题，即预报问题，其计算方法的基本点是必须能作长时间的数值积分。

在忽略摩擦和外源强迫的条件下，大气可视为一个保守系统。把地球大气作为一个整体，研究其整体性质是十分重要的。通过这些整体性质，既可以简单而清晰地揭示出外界因子对整个大气运动的基本影响，又可以推出大气运动内部各物理量之间的最一般的关系，从而揭示出有关大气运动的最基本的性质。在文献 [26] 中，曾庆存详细地论证了全球大气运动在不考虑强迫和摩擦的情况下，具有若干重要的整体性质，即其总能量、总质量、总涡度、总拟能及总角动量是守恒的。然而，当人们作具体的气候数值模拟或数值天气预报时，不可避免地要采用近似的计算方法。根据当代计算方法研究的一条不成文的基本法则——问题原型的基本特征在离散化后，应尽可能地得到保持^[92]，否则，就会给我们的物理系统引入虚假的外来影响，或者使最基本的物理定律遭到破坏，那时，就不可能期望得到较准确的气候模拟和天气预报结果了。

正是基于以上的考虑，尤其是针对大气海洋方程的非线性和复杂性特征，为了保证其数值计算能长时间进行下去，计算稳定性、计算准确性和计算省时性成了三个需同时关注的重要问题。大量的理论分析和数值实验结果表明，保持总能量守恒是整个问题的一个重要关键。过去的实践，已使大气物理所形成了一套总能量守恒的算法，针对不同类型的问题相应地构造了各自的保持总能量守恒的差分格式（在线性情形和若干简单情形就是所谓的平方守恒格式）。实践证明，这些格式总的计算效果是良好

的^[93~96]。最近，又进一步构造出四个物理量均守恒的差分格式¹⁾。

另一方面，由于一切守恒的物理过程都可表达成 Hamilton 系统。为解决 Hamilton 系统的数值计算问题，冯康^[92]提出了一套新的思想和算法——辛几何算法，至今该算法对于常微分方程来说已有较完善的理论，而对于偏微分方程来说，特别是对于大气、海洋方程来说也已取得很大进展^[97~104]。采用辛算法不仅可以保证长期的计算稳定性，而且在一定条件下可以证明原系统及其离散后的系统有（或近似有）多个不变量（或守恒性）。

下面就上述内容分几个问题简要介绍如下。

3.2 关于计算稳定性与算子非负性及能量守恒性间的关系

考虑一个发展方程：

$$\frac{\partial F}{\partial t} + AF = G, \tag{1}$$

其中， A 可以是非线性算子， G 是强迫耗散项（常见的一些大气、海洋、环境方程均能写为这种形式）。如果有内积 $(AF, F) \geq 0$ ，则称算子 A 为非负的，也称方程式 (1) 具有非负性。其中当 $(AF, F) = 0$ 时，称算子 A 是广义反对称的，它对应着总能量守恒的情况，即 $\int F^2 ds = \text{常数}$ ；而 $(AF, F) > 0$ 时，对应着总能量衰减的情形，即 $(\partial / \partial t) \int F^2 ds > 0$ 。我们所讨论的大气、海洋动力学方程组，在不考虑源汇时，一般都满足总能量守恒或总能量衰减。

证明了在无粘的情况下，地球流体力学方程组对应于一个广义反对称的算子方程，只要对应的差分算子保持此反对称性，那么在一定条件下其差分格式就具有能量守恒、广义能量守恒和“平均尺度”守恒，且其格式是计算稳定的^[105~107]。数学上可以用以下定理来表述：

定理：与算子方程 (1) 对应的差分方程可写为

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + A(\tau^*)[\theta F^{n+1} + (1 - \theta)F^n] = 0 \tag{2}$$

那么，有如下结论：

- (1) 若 A 为非负算子，则格式 (2) 当 $1 \geq \theta \geq 1/2$ 时，无条件稳定；
- (2) 若 A 还是广义反对称的，且 $\theta = 1/2$ ，则格式 (1) 具有如下守恒性：

能量守恒： $\| F^{n+1} \|^2 = \| F^n \|^2 = \| F^0 \|^2$ ， (3a)

广义能量守恒： $\| F^n \|^2 + \frac{\tau^2}{4} \| AF^n \|^2 = \text{常数}$ ， (3b)

“平均尺度”守恒： $\frac{\| F^n \|^2}{\| AF^n \|^2} = \text{常数}$ 。 (3c)

上述定理把数学、计算数学和物理学中的三个不同概念联系起来，把其间的密切关系明确地揭示出来。这是学科渗透的结果，说明学科交叉是很重要的。

3.3 非线性计算不稳定的特解

上面介绍的虽然是一些抽象的理论结果，但它们对于所要研究的地球流体力学问题

1) 王斌、季仲贞，多守恒差分格式的构造及其数值试验，科学通报，2002（即将发表）。

题具有基础性的意义。正是利用这些理论结果，我们又从反方面证明了国际上流行的一些格式，如 Arakawa 格式、Lilly 格式、谱模式甚至 Galerkin 有限元近似，在时间方向离散化后，都不真正具有完全能量守恒性，不可能保证完全的计算稳定。我们在前人工作的基础上，系统地研究了有关非线性计算不稳定的特征、例子、分析方法、产生的机理和克服的措施等一系列问题。对上述各种流行的格式都找到了非线性计算不稳定的特解^[108~111]。

3.4 关于计算不稳定的产生机理

曾庆存^[112]提出构成计算紊乱和计算不稳定的三种机理：（1）频散效应：由于差分离散化，会造成许多虚假频散现象，表现为计算紊乱或不稳定，而且证明了造成计算紊乱的寄生波是沿群速方向传播的；（2）能谱的非线性转移效应；（3）能量增长效应：指出只要不是能量守恒和能量衰减的差分格式，就不能保证有计算稳定。也就是说，能量守恒是保证计算稳定的一个充分性条件。这一工作是最早用物理观点与数学分析相结合的方法，阐述造成地球流体问题的计算出现计算紊乱和计算不稳定的机理，它为我所开展计算地球流体力学研究提供理论指导，告诉我们要用物理观点与数学方法结合起来研究这类问题。

3.5 协调的完全能量守恒的差分格式

为了避免出现非线性计算不稳定，我们先后构造了各种协调的完全能量守恒的差分格式（包括隐式的、显式的和高精度的），或简称之为完全平方守恒格式^[113~123]。

举例来说，对于正压原始方程，

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u \phi}{\partial x} + \frac{\partial v \phi}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

引用变数变换

$$U = \sqrt{\phi} u, V = \sqrt{\phi} v, \Phi = \sqrt{\phi} \phi. \tag{5}$$

于是方程组（4）可改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u U}{\partial x} + u \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v U}{\partial y} + u \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} - fV + \Phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u V}{\partial x} + u \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v V}{\partial y} + u \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right\} + fU + \Phi \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial U \Phi}{\partial x} + \frac{\partial V \Phi}{\partial y} \right\} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

显然，（6）式是（1）式的一个特例，只需取 $F = (U, V, \phi)^T$ ，不难证明（6）式有能量关系，

$$\frac{1}{2} \| F \|^2 = \frac{1}{2} \iint (U^2 + V^2 + \phi^2) dx dy = \frac{1}{2} \iint [\phi(u^2 + v^2) + \phi^2] dx dy. \tag{7}$$

容易写出与（6）式相对应的完全总能量守恒的差分格式^[114]，

$$\begin{cases} \frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^* \bar{U}}{\partial x} + u^* \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v^* \bar{U}}{\partial y} + u^* \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}\right] - f\bar{V} + \Phi^* \frac{\delta \phi}{\delta x} = 0, \\ \frac{V^{n+1}-V^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u^* \bar{V}}{\partial x} + u^* \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v^* \bar{V}}{\partial y} + u^* \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right] + f\bar{U} + \Phi^* \frac{\delta \phi}{\delta y} = 0, \\ \frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} + \frac{\delta \Phi^* \bar{U}}{\delta x} + \frac{\delta \Phi^* \bar{V}}{\delta y} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\delta() / \delta x$ 、 $\delta() / \delta y$ 均为相应方向的中央差。

完全平方守恒格式一般是隐式的, 在求解时要进行非线性迭代, 较费机时。为了节省计算时间, 在“八五”期间, 我们又设计出显式完全平方守恒的差分格式。可以说这是在国际上首次系统地构造了时间向前差的显式平方守恒格式, 提出了“协调耗散”概念及其理论, 并从几何角度对显式平方守恒格式进行了分析研究, 克服了经典平方守恒格式的缺点, 尤其对经典的显式 Runge-Kutta 法进行了平方改造, 使这类耗散型格式在保持原来格式形式和精度不变的前提下变为平方守恒型格式, 并在数值模拟中获得很好的效果, 从而使这类在保守系统求解中几乎要被淘汰的古典格式获得了新生。

为了提高数值计算精度, 节省计算时间, 我们先后又发展了多种经济差分算法, 其中包括特征方向法、区域分离法、改进分解算法等。在近岸海流数值模拟和台风路径数值模拟计算中取得显著的时间效益, 分别使计算效率提高了 5 倍和 8 倍。

大气、海洋计算问题大多是长时间计算问题, 而且常常是多种尺度相互作用的复杂计算问题。换言之, 这类问题的计算不仅要求计算格式能长时间计算稳定, 而且要求计算格式有充分高的计算精度。因此我们进一步构造了具有时间方向和空间方向高精度的平方守恒格式^[121~123]。

3.6 总能量守恒的半 Lagrange 差分格式

Euler 法和 Lagrange 法是流体力学描写运动的两种方法。以往, 对于大气、海洋等地球流体力学问题, 更多的是采用 Euler 法求解, 然而, 自 20 世纪 50 年代以来, 对 Lagrange 法的研究也一直在进行着, 特别是自 1980 年以来, 其发展速度尤为迅速, 已广泛应用于数值天气预报业务, 不仅提高了计算时效, 而且也改善了计算精度。

目前, 存在的问题是原来偏微分方程的整体守恒性得不到保证, 长时间数值积分会带来计算误差。在文献 [116, 124] 中, 曾提出过一种可以保持总能量守恒的半 Lagrange 法, 其具体做法主要是把问题的求解由 Lagrange 空间转化到 Euler 空间进行。这种做法在实际应用中显得繁琐。因此, 能否直接在 Lagrange 空间构造总能量守恒的格式成为一个十分值得研究的问题, 下面以一维正压大气原始方程组为例来加以说明^{[125,126], 1)}。

在半 Lagrange 坐标下, 一维正压大气原始方程组可写为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + fv, \\ \frac{dv}{dt} = -fu, \\ \frac{d\phi}{dt} = -\phi \frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \quad (9)$$

1) 陈嘉滨、季仲贞, 半隐式半拉格朗日平方守恒计算格式的构造和检验, 2002 (待刊)。

其中， u 和 v 分别是东西和南北向的风速， φ 是位势高度， f 是科里奥利参数，引用关于散度 Lagrange 表示

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt}(\delta x), \tag{10}$$

其中， δx 表示流体移动的无限小的空间长度。于是 (9) 式可化为如下形式：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(U\sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi^2}{2}\right) - fV\right], \\ \frac{d}{dt}(V\sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x}(fU), \\ \frac{d}{dt}(\varphi\sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x}\left[\frac{\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u)\right], \end{cases} \tag{11}$$

其中， $U=\phi u$ ， $V=\phi v$ ，而 $\phi=\sqrt{\varphi}$ 。于是，由 (11) 式可推得如下总能量变化方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{U^2 + V^2 + \varphi^2}{2}\delta x\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{u^2 + v^2 + \varphi}{2}\varphi\delta x\right] = -\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi^2)\delta x, \tag{12}$$

上式左端表示在无限小的空间间距 δx 内的总能量变化，右端具有辐散形式，而且它在整个空间上积分为零，这也表明方程组 (11) 是总能量守恒的。因此，不难想到，只要把方程组 (11) 的右端离散化，就有可能构造出具有反对称性质的离散算子，从而可保证半 Lagrange 格式的总能量守恒性。

我们针对方程组 (11) 分别构造了显式和半隐式的完全能量守恒的半 Lagrange 格式，数值检验结果表明效果较好。

3.7 多守恒差分格式

大气浅水波方程组具有五个基本的守恒性：三个一次守恒性和两个二次守恒性。三个一次守恒性分别是总质量守恒、总绝对角动量守恒和总位涡守恒，它们都有重要的物理意义，这在文献 [26] 和 [127] 中分别作了阐述。两个二次守恒性，即总能量守恒和总位涡拟能（位涡平方）守恒，在数值模拟中比起一次守恒性来说更具有实用意义。首先，它们是数值解有界或稳定的充分条件，其次，二次守恒性有着深刻的物理意义。对于正压大气，能量守恒性反映着动能和位能的转换平衡关系；而拟能守恒性控制着涡度场内能量的分布，各种涡之间的相互作用以及涡度场内部或它与其他场（如散度场、流场等）之间的能量转换关系。因此，在构造差分格式时尽可能保持这些基本守恒属性是非常必要的。

正压浅水波方程组 (4) 在球坐标下可以有多种表示形式，如下是其中的一种：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\theta}\frac{\partial E}{\partial \lambda} - \eta v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial E}{\partial \theta} + \eta u = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{a\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(u\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\bar{v}\varphi)\right] = 0, \end{cases} \tag{13}$$

其中， θ 、 λ 分别为纬度、经度， a 为地球半径， u 、 v 和 φ 分别为纬向风、经向风和位势高度， $\bar{v}=v\cos\theta$ ， E 和 η 为系统的局地能量和绝对涡度：

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \varphi, \\ \eta = \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) = q + 2\omega \sin \theta, \end{cases} \quad (14)$$

其中, ω 为地球自转角速度, Ω 为角动量, q 为相对涡度, 具体表达式如下:

$$\begin{cases} \Omega = u \cos \theta + a \omega \cos^2 \theta, \\ q = \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \theta} (u \cos \theta) \right]. \end{cases} \quad (15)$$

将方程组 (13) 作空间离散化, 并加以订正, 可得如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \delta_\lambda^\times E - \eta v = \epsilon L \eta v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \delta_\theta^\circ E + \eta u = -\epsilon L \eta u, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + [\delta_\lambda^\times (u \varphi) + \delta_\theta^\circ (v \varphi)] = 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中, 右边为订正项, ϵ 为可调实数, L 为离散平流算子.

$$LF = \delta_\lambda^\times (uF) + \delta_\theta^\circ (vF) = (\nabla_d \cdot \mathbf{V})F, \quad (17)$$

$\nabla_d = (\delta_\lambda^\times, \delta_\theta^\circ)$ 为离散梯度算子, $\mathbf{V} = (u, v)$ 为风矢量; $\delta_\lambda^\times$ 和 δ_θ° 分别为沿 λ 方向和 θ 方向的中央差分算子 ($\Delta\lambda$ 、 $\Delta\theta$ 为相应的空间步长):

$$\begin{cases} (\delta_\lambda^\times F)_{i,j} = \frac{F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2a \cos \theta_j \Delta \lambda}, \\ (\delta_\theta^\circ F)_{i,j} = \frac{F_{i,j+1} \cos \theta_{j+1} - F_{i,j-1} \cos \theta_{j-1}}{2a \Delta \theta \cos \theta_j}. \end{cases} \quad (18)$$

易证, 在周期或刚壁条件下, 若不经订正, 方程组 (16) 可保持总质量守恒、总位涡守恒和总能量守恒,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} H_m = 0, H_m = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \varphi_{i,j} \cos \theta_j = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} H_\xi = 0, H_\xi = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \xi_{i,j} \varphi_{i,j} \cos \theta_j = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} H_E = 0, H_E = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left(e_{i,j} + \frac{1}{2} \varphi_{i,j} \right) \varphi_{i,j} \cos \theta_j = 0, \end{cases} \quad (19)$$

若经订正, 且形式 ϵ 满足:

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\xi^2, L\varphi) - (\xi, L\eta) / (\xi, L^2 \eta), \quad (20)$$

则可以证明订正后的半离散方程 (16) 还能保持总位涡拟能守恒:

$$\frac{\partial H_\Omega}{\partial t} = 0, H_\Omega = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \Omega_{i,j} \varphi_{i,j} \cos \theta_j = 0. \quad (19)'$$

采用隐式 Euler 中点格式, 将方程 (16) 的时间微分部分进行离散, 便得到如下求解方程 (13) 的全离散差分格式:

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}+\delta_x^c E^{n+\frac{1}{2}}-(\eta^{n+\frac{1}{2}}+\varepsilon^n L\eta^{n+\frac{1}{2}})v^{n+\frac{1}{2}}=0, \\ \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t}+\delta_y^c E^{n+\frac{1}{2}}+(\eta^{n+\frac{1}{2}}+\varepsilon^n L\eta^{n+\frac{1}{2}})u^{n+\frac{1}{2}}=0, \\ \frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\Delta t}+\delta_x^c [u^{n+\frac{1}{2}}\varphi^{n+\frac{1}{2}}]+\delta_y^c [v^{n+\frac{1}{2}}\varphi^{n+\frac{1}{2}}]=0, \end{cases} \quad (21)$$

其中, $F^{n+\frac{1}{2}}=\frac{F^{n+1}+F^n}{2}$ ($F=u,v,E,\varphi,\eta$)。可以验证, 差分格式 (21) 能严格保持方程 (13) 的 4 个基本守恒性, 即总能量、总质量、总位涡和总位涡拟能守恒。

用理想的 4 波 Rossby-Haurwitz 波来对格式 (21) 进行试验。表 1 给出 5 种物理量随时间的演变结果, 不难看到格式 (21) 相当好地保持了总能量、总质量、总位涡拟能和总位涡守恒, 即便是角动量也保持了准守恒。

表 1 采用格式 (21) 求解方程 (13) 时 5 个基本守恒量随时间的演变

积分时间/ d	总能量 $H_E/$ $\times 10^{-3}$	总位涡拟能 $H_\xi^2/$ $\times 10^{-25}$	总质量 $H_m/$ $\times 10^{-7}$	总位涡 $H_\xi/$ $\times 10^{-16}$	总角动量 $H_\Omega/$ $\times 10^{-5}$
0	7618457506323408	2006621333999357	1752486454323497	0	5820669865543265
10	7618457506323441	2006621334001492	1752486454323499	0	5820476339401915
20	7618457506323459	2006621334002330	1752486454323487	0	5820545040045108
30	7618457506323408	2006621334006205	1752486454323500	0	5820405332178058
40	7618457506323432	2006621334000935	1752486454323499	0	5820407246503657
50	7618457506323408	2006621334000415	1752486454323489	0	5820314263845975
60	7618457506323477	2006621334001919	1752486454323486	2	5820193661838837
70	7618457506323428	2006621334003679	1752486454323498	0	5820144542200727
80	7618457506323434	2006621333997886	1752486454323478	0	5820038587988923
90	7618457506323417	2006621333981177	1752486454323472	0	5820053927858246
100	7618457506323445	2006621333975399	1752486454323489	0	5819813687341976

3.8 解正压大气原始方程组的辛几何算法

为了把辛几何算法应用于大气方程的求解, 首先要把大气浅水波方程组 (4) 在形式上作改写^[99]。

令:

$$\zeta=\frac{1}{\phi}\left\{2\omega\sin\theta+\frac{1}{a\cos\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{\partial u\cos\theta}{\partial\theta}\right)\right\}.$$

引入能量泛函 $H(\mathbf{F})$ 如下:

$$H(\mathbf{F})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(u^2+v^2+\varphi)\varphi a^2=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(u^2+v^2+\varphi)\varphi\mathrm{d}s.$$

并再次记 $\mathbf{F}=(u,v,\varphi)^{\mathrm{T}}$, 于是正压大气原始方程组 (4) 可写为如下正则形式:

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}=\tilde{J}_s\frac{\delta H}{\delta\mathbf{F}},$$

其中算子 $\tilde{J}_s$ 定义如下:

$$\tilde{J}_s = \begin{pmatrix} 0 & \zeta & \frac{1}{a\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ -\zeta & 0 & -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{a\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} & -\frac{1}{a\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

可以证明算子 $\tilde{J}_s$ 是反对称的： $\tilde{J}_s^* = \tilde{J}_s^T = -\tilde{J}_s$ ，利用 (24) 式及 $\tilde{J}_s$ 的反对称性，即可推出大气正压原始方程组的重要物理性质——总能量守恒性：

$$\frac{dH(\mathbf{F})}{dt} = \left(\frac{\delta H(\mathbf{F})}{\delta \mathbf{F}}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\delta H(\mathbf{F})}{\delta \mathbf{F}}, \tilde{J}_s \frac{\delta H(\mathbf{F})}{\delta \mathbf{F}} \right) = 0. \tag{25}$$

定义泊松括号

$$\{T, S\} = \left(\frac{\delta T}{\delta \mathbf{F}}, \tilde{J}_s \frac{\delta S}{\delta \mathbf{F}} \right), \tag{26}$$

可证上述泊松括号具有反对称性、线性性和 Jacobi 性质。显然泛函 $H(\mathbf{F})$ 为系统 (24) 的一个最基本的不变量，还可以证系统 (24) 还有另外四个不变量，即大气系统的总质量、总位涡、总角动量和总焓能是守恒的，从而系统 (24) 是一个无限维 Hamilton 系统。

根据辛算子法的思想，先将无限维 Hamilton 系统 (24) 离散成一个有限维 Hamilton 系统

$$\frac{d\mathbf{F}^d}{dt} = J_s \frac{\delta_h H^d(\mathbf{F})}{\delta_h \mathbf{F}^d}, \tag{27}$$

其中，算子 J_s 是与算子 $\tilde{J}_s$ 相容的离散反对称算子：

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_d & -\nabla_\lambda \\ -\zeta_d & 0 & -\nabla_\theta \\ \nabla_\lambda^T & \nabla_\theta^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

其中 ∇_λ 和 ∇_θ 分别为算子 $-\frac{1}{a\cos\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}$ 和 $-\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta}$ 所对应的中央差算子。

从方程 (27) 出发，可以构造多种辛格式。今取一种较典型的辛格式，即隐式 Euler 中点格式如下：

$$\frac{\mathbf{F}_s^{n+1} - \mathbf{F}_s^n}{\Delta t} = J_s^{n+\frac{1}{2}} \frac{\delta_h H_s^{n+\frac{1}{2}}}{\delta_h \mathbf{F}_s^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{29}$$

其中， $J_s^{n+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & \zeta_s^{n+\frac{1}{2}} & -\nabla_\lambda \\ -\zeta_s^{n+\frac{1}{2}} & 0 & -\nabla_\theta \\ \nabla_\lambda^T & \nabla_\theta^T & 0 \end{bmatrix},$

$$\zeta_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varphi_{ij}^{n+\frac{1}{2}}} (2\omega \sin\theta_j - \nabla_\lambda^T v_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \nabla_\theta^T u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}),$$

$$H_s^{n+\frac{1}{2}} = H_s(\mathbf{F}_s^{n+\frac{1}{2}}) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{1}{2} [(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^2 + (v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})^2 + \varphi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}] \varphi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} a^2 \rho_j \Delta\lambda \Delta\theta. \tag{30}$$

表 2 给出 4 波 Rossby-Haurwitz 波用辛格式 (29) 积分 120 天 (时间步长 240 s) 后全球总能量、总质量和总位涡的演变。从表 2 可见，它们均有较好的 (近似) 守恒性。

表 2 全球总能量、总质量和总位涡的变化

积分天数	全球总能量 / $\text{m}^4 \text{ s}^{-4}$	全球总质量 / $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$	全球总位涡 / s^{-1}
1	7618457306235.04	175248643.1728687	-0.000000000000000001
20	7618457306244.33	175248643.1728679	0.000000000000000009
40	7618457306240.22	175248643.1728706	-0.000000000000000008
60	7618457306237.16	175248643.1728692	0.000000000000000008
80	7618457306244.37	175248643.1728689	-0.000000000000000009
100	7618457306230.20	175248643.1728696	-0.000000000000000003
120	7618457306238.05	175248643.1728700	0.000000000000000021

3.9 η 坐标和保形正定平流方案

宇如聪和曾庆存等^[128~132]建立了一个适合复杂陡峭地形和我国气候特点的 η 坐标区域数值预报模式 (REM)。模式动力框架采用能保证完全能量守恒的控制方程结构和差分方案。采用 η 坐标作为垂直坐标, 以适合我国复杂陡峭的地形特征。针对暴雨模式中水汽平流处理的困难, 设计了较为省时有有效的保形正定平流方案, 解决了与暴雨直接关联的水汽传输问题。在对模式的水平网格特性进行细致分析和研究的基础上, 选取 E 网格作为模式的网格分布。对 E 网格的差分方案作了精心设计和研究, 发展了一套能充分反应 E 网格特征的差分方案。

4 结束语

建月以来, 我所在理论和计算地球流体力学方面已取得很大的进展, 本文仅就其中的一部分作了若干介绍, 限于篇幅, 还有许多重要内容不能逐一介绍, 如非线性地球流体力学中的低频谱方法、多平衡态理论以及大气中孤立波解与阻塞动力学等等; 在计算流体力学方面, 钟青等^[133~135]构造了物理守恒保真的计算格式, 并作了相应的数值试验; 李建平等^[136,137]提出了计算不确定性原理, 并进行了数值研究; 此外, 还有边界处理问题、带强迫耗散的计算问题^[138,139]等等。另外, 并行计算也是近年来发展十分迅速的一个重要方向, 它不仅可以节省大量计算时间, 而且使原来许多因计算量巨大难以实现的问题, 变成可以成功地做出结果并应用于实际。随着地球科学的发展, 以及与其他自然、社会科学学科的交叉、渗透, 理论与计算地球流体力学将面临着更大的发展空间。

致谢: 本文理论流体力学部分中的部分内容参考了陶诗言等的文章“天气和气候学研究”(《赵九章纪念文集》第 60~86 页), 特此致谢。

参 考 文 献

1 Rossby, C. G., and Collaborators, Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action, *J. Marine Research*, 1939, **2**, 38~55.

- 2 Kible, E. A. , Application of equations of baroclinic fluid mechanics to meteorology, *Ezv. USSR Academy of Sciences, Ser. Geogr. Geophys.* , 1940, 5 (Russian) .
- 3 Jaw, J. J. , The formation of semipermanent centers of action in relation to the horizontal solenoid field, *J. Meteor.* , 1946, **3**, 103~114.
- 4 Kuo, H. L. , Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere, *J. Meteor.* , 1949, **6**, 105~122.
- 5 Charney, J. G. , The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current, *J. Meteor.* , 1947, **4**, 125~162.
- 6 Eady, E. T. , Long waves and cyclone waves, *Tellus* , 1949, **79**, 267~269.
- 7 Kuo, H. L. , Three-dimensional disturbances in a baroclinic zonal current, *J. Meteor.* , 1952, **9**, 260~272.
- 8 伍荣生, 大地形与扰动的不稳定性, *气象学报*, 1964, **34**, 11~19.
- 9 叶笃正, 波状基本气流中的若干扰动动力学问题, *气象学报*, 1964, **34**, 1~10.
- 10 Rossby, C. G. , On the propagation of frequencies and energy in certain types of oceanic and atmospheric waves, *J. Meteor.* , 1945, **2**, 187~264.
- 11 Yeh, T. C. , On the energy dispersion in the atmosphere, *J. Meteor.* , 1949, **6**, 1~16.
- 12 Zeng Qingcun, The evolution of Rossby wave packet in a three-dimensional baroclinic atmosphere, *J. Atmos. Sci.* , 1983, **40**, 73~84.
- 13 卢佩生、曾庆存, 正压大气中扰动的演变, *大气科学*, 1981, **5**, 1~8.
- 14 卢佩生等, 正压准地转模式的谱和扰动的演变, *中国科学* (B辑), 1986, **10**, 1225~1233.
- 15 张明华, 大气动力学中的连续谱及其在大气环流中的重要地位, 中国科学院大气物理研究所博士学位论文, 1987.
- 16 Pedlosky, J. , *Geophysical Fluid Dynamics* , 2nd ed. , Springer, 1987, 710pp.
- 17 Andrews, D. G. , and M. E. McIntyre, Planetary waves in horizontal and vertical shear the generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration , *J. Atmos. Sci.* , 1976, **33**, 2031~2048.
- 18 任舒展等, 斜压大气中连续谱动力学理论及运用 I. 连续谱动力学理论, *中国科学* (B辑), 1995, **25**, 1210~1218.
- 19 任舒展等, 斜压大气中连续谱动力学理论及运用 II. 大气环流中的连续谱和离散谱, *中国科学* (B辑), 1995, **25**, 1329~1338.
- 20 李崇银, 垂直风切变中的 CISK, *大气科学*, 1983, **7**, 427~431.
- 21 Pedlosky, J. , Finite-amplitude baroclinic waves, *J. Atmos. Sci.* , 1970, **27**, 15~30.
- 22 Pedlosky, J. , Finite-amplitude baroclinic waves at minimum critical shear, *J. Atmos. Sci.* , 1982, **39**, 555~562.
- 23 巢纪平、叶笃正, 正压大气中的螺旋行星波, *大气科学*, 1977, **2**, 81~88.
- 24 刘式适、杨大升, 地球大气行星波的螺旋结构, *气象学报*, 1979, **37**, 14~27.
- 25 Fjørtoft, R. , On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for two dimensional nondivergent flow, *Tellus* , 1953, **5**, 225~230.
- 26 曾庆存, 数值天气预报的数学物理基础, 北京: 科学出版社, 1979.
- 27 叶笃正、朱抱真, 大气环流的若干基本问题, 北京: 科学出版社, 1958.
- 28 黄荣辉、岸保勘三郎, 关于冬季北半球定常行星波传播的另一波导的研究, *中国科学* (B辑), 1983, **7**, 940~950.
- 29 黄荣辉, 球面大气定常行星波的波作用守恒方程与波作用通量所表征的定常行星波传播波导, *中国科学* (B辑), 1984, **8**, 766~775.
- 30 黄荣辉, 大气行星尺度运动的动力特征, *大气科学*, 1986, **10**, 348~356.
- 31 Huang Ronghui, and K. Gambo, The response of a model atmosphere in middle latitude to forcing by topography and stationary heat source, *J. Meteor. Soc. Japan* , 1981, **59**, 220~237.
- 32 Huang Ronghui, and K. Gambo, The response of a hemispheric multi-level model atmosphere to forcing by topography and stationary heat source, I. II. , *J. Meteor. Soc. Japan* , 1982, **60**, 78~108.

- 33 Huang Ronghui, and K. Gambo, The response of a hemispheric multi-level model atmosphere to forcing by topography and stationary heat source in summer, *J. Meteor. Soc. Japan*, 1983, **61**, 495~503.
- 34 黄荣辉, 冬季低纬热源异常对北半球大气环流影响的物理机制, 中国科学 (B辑), 1986, **10**, 91~103.
- 35 伍荣生, 关于非均匀介质中波的传播问题, 气象学报, 1989, **47**, 1~7.
- 36 黄荣辉, 邹捍, 球面斜压大气中上传行星波与纬向平均气流的相互作用, 大气科学, 1989, **13**, 383~392.
- 37 Arnold, V. I., On the conditions of nonlinear stability of plane curvilinear flows of an ideal fluid, *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1965, **162** (5), 975~978. (English translation: *Sov. Maths.*, **6**, 773~777.)
- 38 Arnold, V. I., On an a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika*, 1966, **54** (5), 3~5. (English translation: *Amer. Math. Transl. Ser.*, **79**, 267~269.)
- 39 Fjörtoft, R., Application of integral theorems in deriving criteria of laminar flows and for the baroclinic circular vortex, *Geophys. Publ.*, 1950, **17** (6), 1~52.
- 40 Andrews, D. G., On the existence of nonzonal flows satisfying sufficient conditions for stability, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1984, **28**, 243~256.
- 41 Dowling, T. E., A relationship between potential vorticity and zonal wind on Jupiter, *J. Atmos. Sci.*, 1993, **50**, 14~22.
- 42 Ek, N. S., and G. E. Swaters, Geostrophic scatter diagrams and the application of quasigeostrophic free-mode theory to a northeast pacific blocking episode, *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**, 563~581.
- 43 Dowling, T. E., Dynamics of Jovian atmospheres, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1995, **27**, 293~334.
- 44 Tang, M. Z., Nonlinear stability analysis of the zonal flow in the middle and high latitudes, M. S. thesis, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, 1997.
- 45 Mu Mu, Wu Yonghui, Tang Mozhi et al., Nonlinear stability analysis of the zonal flows at middle and high latitudes, *Adv. Atmos. Sci.*, 1999, **16** (4), 569~580.
- 46 Abarbanel, H. D. I., D. D. Holm, J. E. Marsden et al., Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 1986, **318**, 349~409.
- 47 Holm, D. D., R. T. Marsden, and A. Weinstein, Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, *Phys. Rep.*, 1985, **123**, 1~116.
- 48 McIntyre, M. E., and T. G. Shepherd, An exact local conservation theorem for finite amplitude disturbances to non-parallel shear flows, with remarks on Hamiltonian structure and on Arnol'd's stability theorems, *J. Fluid Mech.*, 1987, **181**, 527~565.
- 49 Zeng Qingcun, Variational principle of instability of atmospheric motions, *Adv. Atmos. Sci.*, 1989, **6**, 137~172.
- 50 Shepherd, T. G., Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows, *J. Fluid Mech.*, 1988, **196**, 291~322.
- 51 Shepherd, T. G., Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part 2: continuous stratified fluid, *J. Atmos. Sci.*, 1989, **46**, 888~907.
- 52 Ripa, P., Wave energy-momentum and pseudoenergy-momentum conservation for layered quasi-geostrophic instability problem, *J. Fluid Mech.*, 1992, **235**, 379~398.
- 53 Cho, H. R., T. G. Shepherd, and V. A. Vladimirov, Application of the direct Liapunov method to the problem of symmetric stability in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 1993, **50**, 822~836.
- 54 Ripa, P., Arnol'd's second stability theorem for the equivalent barotropic model, *J. Fluid Mech.*, 1993, **257**, 597~605.
- 55 Song, S. J., and Liu Q. Y., On disturbance and nonlinear stability of the multi-layer quasi-geostrophic basic flows, *Science in China (Ser. D)*, 1999, **42**, 160~171.
- 56 Song, S. J., and Liu Q. Y., Disturbance evolution and the nonlinear stability to the basic flows for two-dimensional quasi-geostrophic motion, *Chinese Science Bulletin*, 1999, **44**, 1179~1184.
- 57 Mu Mu, Nonlinear stability criteria for motions of multi-layer quasigeostrophic flow, *Sciences in China*

- (ser. B), 1991, **34**, 1516~1528.
- 58 Mu Mu, Nonlinear stability of two-dimensional quasi-geostrophic motions, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1992, **65**, 57~76.
- 59 Mu Mu, and Wang X. Y., Nonlinear stability criteria for the motion of three-dimensional quasigeostrophic flow on a beta-plane, *Nonlinearity*, 1992, **5**, 353~371.
- 60 Mu Mu, and T. G. Shepherd, On Arnol' d' s second nonlinear stability theorem for two-dimensional quasi-geostrophic flow, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1994, **75**, 21~37.
- 61 Mu Mu, and T. G. Shepherd, Nonlinear stability of Eady' s model, *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**, 3427~3436.
- 62 Liu Yongming, and Mu Mu, Arnol' d' s second nonlinear stability theorem for general multi-layer quasi-geophysical model, *Adv. Atmos. Sci.*, 1994, **11**, 36~42.
- 63 Liu Yongming, and Mu Mu, Nonlinear stability theorem for Eady' s model of quasi-geostrophic baroclinic flow, *J. Atmos. Sci.*, 1996, **53**, 1459~1463.
- 64 Liu Yongming, Mu Mu, and T. G. Shepherd, Nonlinear stability of continuously stratified quasi-geostrophic flow, *J. Fluid Mech.*, 1996, **324**, 419~439.
- 65 Liu Yongming, and Mu Mu, Nonlinear stability of Generalized Eady' s Model, *J. Atmos. Sci.*, 2000, **57**, 821~827.
- 66 Mu Mu, Zeng Qingcun, T. G. Shepherd et al., Nonlinear stability of multi-layer quasi-geostrophic flow, *J. Fluid Mech.*, 1994, **264**, 165~184.
- 67 Phillips, N. A., Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model, *Tellus*, 1954, **6**, 273~286.
- 68 Mu Mu, Optimality of a nonlinear stability criterion of two-layer Phillips model, *Chinese Science Bulletin*, 1998, **43**, 656~659.
- 69 Li Yang, Baroclinic Instability in the Generalized Phillips' Model Part II: Three-layer Model, *Adv. Atmos. Sci.*, 2000, **17**, 413~432.
- 70 Mu Mu, and J. Simon, A remark on nonlinear stability of the three-dimensional quasigeostrophic motions, *Chinese Science Bulletin*, 1993, **38**, 1978~1984.
- 71 Lindzen, R., The Eady problem for a basic state with zero PV gradient but $\beta=0$, *J. Atmos. Sci.*, 1994, **51**, 3221~3226.
- 72 Li Yang, Mu Mu, S. E. Moon, et al., On the linear and nonlinear stability of generalized Eady model, Part I: normal mode method, *Korean J. Atmos. Sci.*, 1998, **1**, 113~118.
- 73 Li Yang, Mu Mu, S. E. Moon, et al., On the linear and nonlinear stability of generalized Eady model, Part II: nonlinear stability theorem, *Korean J. Atmos. Sci.*, 1998, **1**, 119~125.
- 74 Xu, Q., Generalized energetics for linear and nonlinear symmetric instabilities, *J. Atmos. Sci.*, 1986, **43**, 972~984.
- 75 Mu Mu, T. G. Shepherd, and K. Swanson, On nonlinear symmetric stability and the nonlinear saturation of symmetric instability, *J. Atmos. Sci.*, 1996, **53**, 2918~2923.
- 76 Mu Mu, V. A. Vladimirov, and Wu Yonghui, Energy-Casimir and energy-Lagrange method in the symmetric stability problems, *J. Atmos. Sci.*, 1999, **56**, 400~411.
- 77 Wu Yonghui, and Mu Mu, A remark on the nonlinearly symmetric stability criteria, *Chinese Science Bulletin*, 1998, **43** (12), 1050~1052.
- 78 Bowman, J. C., and T. G. Shepherd, Nonlinear symmetric stability of planetary atmospheres, *J. Fluid Mech.*, 1995, **296**, 391~407.
- 79 Mu Mu, A criterion of symmetric stability of planetary atmospheres, East Asian Monsoon and Torrential Rain in China, 1999, 476~482.
- 80 McWilliams, J. C., An application of equivalent modons to atmospheric blocking, *Dyn. Atmos. Oceans*, 1980, **5**, 43~66.

- 81 Nycander, J. , Refutation of stability proofs for dipole vortices, *Phys. Fluids*, 1992, **4**, 67~476.
- 82 Wu Yonghui, and Mu Mu, Nonlinear instability of dipole vortices and the atmospheric blocking, *Progress in Natural Science*, 1999, **9**, 234~237.
- 83 Li Yang, Mu Mu, and Wu Yonghui, A study on the nonlinear stability of fronts in the Ocean on a sloping continental shelf, *Adv. Atmos. Sci.* , 2000, **17**, 275~284.
- 84 Vladimirov, V. A. , Mu Mu, Wu Yonghui et al. , On nonlinear stability of baroclinic fronts, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 1999, **91**, 65~84.
- 85 Shepherd, T. G. , Nonlinear saturation of baroclinic instability. Part 1: The two-layer model, *J. Atmos. Sci.* , 1988, **45**, 2014~2025.
- 86 Shepherd, T. G. , Nonlinear saturation of baroclinic instability, part 3: bounds on the energy, *J. Atmos. Sci.* , 1993, **50**, 2697~2709.
- 87 Mu Mu, and Xiang Jie, On the evolution of finite-amplitude disturbance to the barotropic and baroclinic quasi-geostrophic flows, *Adv. Atmos. Sci.* , 1998, **15**, 113~123.
- 88 Xiang Jie, and Mu Mu, Saturation of nonlinear instability of parallel shear flow, *Progress in Natural Science*, 1997, **7**, 239~243.
- 89 Ishioka, K. , and S. Yoden, Numerical methods of estimating bounds on the nonlinear saturation of barotropic instability, *J. Meteor. Soc. Japan*, 1996, **74** (2), 167~174.
- 90 Zhu, X. , and D. F. Strobel, Nonlinear saturation of baroclinic instability in two-layer models, *J. Atmos. Sci.* , 1992, **49**, 1961~1967.
- 91 Olascoaga, M. J. , and P. Ripa, Baroclinic instability in a two-layer model with a free boundary and β effect, *J. Geophys. Res.* , 1999, **104**, 23357~23366.
- 92 冯康、秦孟兆, Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法, 自然科学进展, 1991, **1** (2), 102~112.
- 93 曾庆存、季仲贞、袁重光, 原始方程差分格式的设计, 第二次全国数值天气预报会议论文集, 北京: 科学出版社, 1980, 300~313.
- 94 曾庆存、季仲贞、李荣凤, 发展方程差分格式的构造与近岸海流数值模拟, 大气科学, 1988, 特刊, 166~175.
- 95 季仲贞, 平方守恒型差分格式的构造, 中期数值天气预报文集, 北京: 气象出版社, 1982.
- 96 曾庆存、张学洪, 球面上斜压原始方程组保持总有效能量守恒的差分格式, 大气科学, 1987, **11** (2), 113~127.
- 97 Qin M. Z. , and W. J. Zhu: Construction of Symplectic schemes for wave equation via hyperbolic function $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, *Computer Math. Applic.* , 1993, **26** (8), 1~11.
- 98 McLachlan, Symplectic integration of Hamilton wave equations, *Numerische Mathematik*, 1994, **66**, 465~492.
- 99 王斌、曾庆存、季仲贞, 平方守恒系统与 Hamilton 系统, 中国科学 (A 辑), 1995 年, **25** (7), 765~770.
- 100 王斌、季仲贞、曾庆存, 辛算子法及其检验, 自然科学进展, 1997, **7** (6), 668~675.
- 101 王斌、季仲贞、肖庆农, 大气动力学方程的 Hamilton 算法, 计算物理, 2001, **18** (4), 289~297.
- 102 Ji Zhongzhen, Wang Bin, Zhao Ying et al. , The total energy conservation and the symplectic algorithm, *Adv. Atmos. Sci.* , 2002, **19** (3), 459~467.
- 103 Zhao Ying, Wang Bin and Ji Zhongzhen, Symplectic-like difference schemes for generalized Hamiltonian Systems, *Adv. Atmos. Sci.* , 2002, **19** (4), 719~726.
- 104 赵颖、王斌、季仲贞, 动力保守系统的一类双属性格式, 中国科学院研究生院学报, 2002, **19** (1), 82~85.
- 105 曾庆存、季仲贞, 发展方程的计算稳定性问题, 计算数学, 1981, **3** (1), 79~8.
- 106 曾庆存、季仲贞, 关于非线性计算稳定性的若干问题, 力学学报, 1981, **13** (3), 209~217.
- 107 季仲贞、曾庆存, 发展方程差分格式的构造和应用, 大气科学, 1982, **6** (1), 88~94.
- 108 季仲贞, 非线性计算稳定性的比较分析, 大气科学, 1980, **4** (4), 344~354.
- 109 季仲贞, 二维 Lilly 格式中非线性计算不稳定的例子, 科学通报, 1980, **25** (9), 890~892.
- 110 季仲贞, Arakawa 格式非线性计算不稳定的例子, 气象学报, 1981, **39** (2), 237~239.

- 111 季仲贞、曾庆存, 谱展开法的非线性计算不稳定的例子, 科学通报, 1982, **27** (20), 1246~1248.
- 112 曾庆存, 计算稳定性的若干问题, 大气科学, 1978, **2** (3), 181~191.
- 113 曾庆存、张学洪, 完全保持能量守恒的可压缩流体时空差分格式和协调的分解算法, 中国科学, 1981, **11** (11), 1355~1366.
- 114 王斌、季仲贞, 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验, 科学通报, 1990, **35** (10), 766~768.
- 115 季仲贞、王斌, 再论发展方程差分格式的构造和应用, 大气科学, 1991, **15** (2), 1~10.
- 116 王斌、季仲贞、曾庆存, 一种省时的显式数值积分方案, 科学通报, 1992, **37** (24), 2247~2250.
- 117 王斌、季仲贞, 协调耗散算子与显式完全平方守恒差分格式, 中国科学 (B辑), 1993, **23** (6), 665~672.
- 118 Wang Bin, and Ji Zhongzhen, An Improved splitting method, *Adv. Atmos. Sci.*, 1993, **10** (4), 447~452.
- 119 王斌、季仲贞, 一类快速经济算法, 自然科学进展, 1994, **4** (4), 417~422.
- 120 王斌、季仲贞、曾庆存, 一种新的区域分离法, 力学学报, 1994, **26** (5), 530~535.
- 121 季仲贞、王斌, 一类高时间差分精度的平方守恒格式的构造及其应用检验, 自然科学进展, 1994, **4** (2), 149~157.
- 122 Ji Zhongzhen, and Li Jing, A High-order compact scheme with square-conservativity, *Adv. Atmos. Sci.*, 1998, **15** (4), 580~584.
- 123 季仲贞、李京、王斌, 紧致平方守恒格式的构造和检验, 大气科学, 1999, **23** (3), 323~332.
- 124 季仲贞、王斌, 保持总能量守恒的“半拉格朗日算法”, 计算物理, 1996, **13** (4), 403~409.
- 125 陈嘉滨、季仲贞, 半拉格朗日平方守恒计算格式的研究, 大气科学, 2001, **25** (6), 837~846.
- 126 季仲贞、陈嘉滨, 一种新的显式半 Lagrange 差分格式, 自然科学进展, 2001, **11** (9), 909~913.
- 127 杨大升、刘余滨、刘式适, 动力气象学, 北京: 气象出版社, 1983.
- 128 Yu Rucong, A Two Step Shape-Preserving Advection Scheme, *Adv. Atmos. Sci.*, 1994, **11** (4), 479~490.
- 129 宇如聪, E 网格变量分布下差分格式的性质, 大气科学, 1994, **18** (2), 152~162.
- 130 宇如聪、曾庆存、彭贵康等, “雅安天漏”研究, II. 数值预报试验, 大气科学, 1994, **18** (5), 535~551.
- 131 Yu Rucong, Application of a Shape-Preserving Advection Scheme to the Moisture Equation in an E-grid Regional Forecast Model, *Adv. Atmos. Sci.*, 1995, **12** (1), 13~19.
- 132 曾庆存、宇如聪、彭贵康等, “雅安天漏”研究, III. 特征、物理量结构及其形成机制, 大气科学, 1994, **18** (6), 649~659.
- 133 Zhong Qing, The Formulation of Perfect Square Conservative Time Difference Scheme and Its Preliminary Check, *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**, 497~502.
- 134 钟青, 物理守恒律保真格式构造与数值预报斜压原始方程传统谱模式改进研究, 气象学报, 1995, **50** (6), 641~661.
- 135 Zhong Qing, Chen Jiatian, and Sun Zuoling, Elimination of computational systematical errors and improvements of weather and climate system models in relation to baroclinic primitive equations, *Adv. Atmos. Sci.*, 2002, **19**, 1103~1112.
- 136 李建平、曾庆存、丑纪范, 非线性常微分方程的计算不确定性原理 I. 数值结果, 中国科学 (E辑), 2000, **43** (5), 403~412.
- 137 李建平、曾庆存、丑纪范, 非线性常微分方程的计算不确定性原理 II. 理论分析, 中国科学 (E辑), 2000, **43** (6), 550~567.
- 138 Lin Wantao, Ji Zhongzhen, and Wang Bin, Construction of explicit quasi-complete square conservative difference schemes of forced dissipative nonlinear evolution equations, *Adv. Atmos. Sci.*, 2001, **18** (4), 604~612.
- 139 林万涛、季仲贞、王斌, 强迫耗散非线性发展方程显式差分格式的计算稳定性, 中国科学院研究生院学报, 2002, **19** (4), 86~89.

Achievements in Geophysical Fluid Dynamics

Mu Mu, Ji Zhongzhen, Wang Bin, and Li Yang

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract This survey is concerned with some main results and achievements in theoretical and computational geophysical fluid dynamics obtained by the scientists of the Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences. In the field of theoretical geophysical fluid dynamics, the contents are: long-wave dynamics and linear stability problems, weakly-nonlinear theory and planetary-wave dynamics, nonlinear stability criteria of atmospheric and oceanic motions established by Arnold method (energy-Casimir method), the evolution of disturbance, the interaction of disturbance and basic state, and the conditional instability of the second kind (CISK) in the tropical atmospheric dynamics. For computational geophysical fluid dynamics, the mechanism of computational disorder and instability is explained from both physical consideration and mathematical analysis. The close relationship among computational stability, non-negative of operators and energy conservation is discussed. The finding of the nonlinear unstable solution of some internationally popular instantaneous energy conservation schemes and the design of a series of explicit, implicit and high-resolution schemes which are completely squarely conservative and harmonic inside are presented. The development of many economic algorithms is described. Moreover, energy-conserving semi-Lagrangian scheme, multi-conservation scheme and symplectic difference scheme developed in recently years are briefly introduced.

Key words: geophysical fluid dynamics; stability and instability; completely squarely conservative; symplectic difference scheme; economic algorithm