# 三维散度方程及其对暴雨系统的诊断分析

杨帅1,2 高守亭1

1 中国科学院大气物理研究所,北京 100029
 2 中国科学院研究生院,北京 100049

**摘 要**利用 WRF 模式对中国江淮流域一次典型的江淮梅雨锋暴雨过程进行了数值模拟。在模拟结果比较可信的前提下,利用该模式输出的高时空分辨率资料,分析了三维散度的时空分布特征与降水的关系。分析发现,此次江淮梅雨暴雨过程中,对流层中低层尤其是 4.287 km (约 600 hPa)高度层的三维散度场非零区与雨带对应较好。其移动趋势也与雨带的移动趋势(相同时段基本位于相同的纬度带内,逐渐南移)一致。暴雨大值中心与三维散度极值中心重合。降水量的增减与三维散度强度变化一致。而无降水的区域为大片的三维散度零值区。三维散度之所以能较好地诊断降水,是因为对流层低层的水汽蒸发和对流层中高层的水汽凝结形成了云,而云导致的质量强迫对三维散度的这种上负下正的分布又有正反馈的作用,而且为降水的发生发展提供了有利条件。在以上分析的基础上,推导了三维散度方程,并通过计算找出影响三维散度变化的主要因子。

关键词 三维 散度 方程 诊断

文章编号 1006 - 9895 (2007) 01 - 0167 - 13 中图分类号 P458 文献标识码 A

# Three-Dimensional Divergence Equation and Its Diagnosis Analysis to Storm Rainfall System

YANG Shuai<sup>1, 2</sup> and GAO Shou-Ting <sup>1</sup>

Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029
 Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049

**Abstract** By utilizing three-dimensional non-hydrostatic WRF (Weather Research and Forecasting) model, a typical Meiyu frontal rainfall which occurs in the mid-lower reaches of the Yangtze River in China is numerically simulated. Based on credible model output data with higher spatial and time resolution, the correlation between three-dimensional divergence and rainfall is analyzed.

It is found that the nonzero zone of three-dimensional divergence field in the middle and lower troposphere, especially at 4. 287 km level (about 600 hPa), has better corresponding relationship with storm rainfall in the location, stretching orientation as well as range. They move southward gradually, and are basically located within the same latitude zone in the same period. The rainfall centers and centers of three-dimensional divergence are nearly collocated. The precipitation has a positive correspondence to the intensity of mass divergence. The change tendencies of precipitation quantity and intensity of three-dimensional divergence are identical. While regions where there is no precipitation tally with zero-value areas of three-dimensional divergence.

Why the collocation between the non-zero value zone of the magnitude of three-dimensional divergence in the lower troposphere and the negative value zone of three-dimensional divergence in the upper troposphere can better diagnose precipitation? To answer this question, the meridional-vertical cross sections along 118°E of the horizontal

**收稿日期** 2005-08-31, 2005-11-23 收修定稿

资助项目 国家自然科学基金资助项目 40433007、40405007,中国科学院海外杰出学者基金 2004-2-7

作者简介 杨帅,女,1979年出生,博士,研究方向:华北暴雨中的湿饱和不稳定和干侵人的研究。E-mail: ys\_ys@126.com

and vertical components of three-dimensional divergence and the vertical velocity are analyzed. The horizontal convergence in the lower troposphere couples with the horizontal divergence in the upper troposphere. The vertical component of three-dimensional divergence is out of phase with the horizontal component. Below 7 km, the increase of updraft with height leads to the vertical divergence, whereas the contrary case causes the vertical convergence above 7 km. Three-dimensional divergence results from the residual between horizontal and vertical components of three-dimensional divergence, and its sign is determined by the vertical component of three-dimensional divergence. Above analysis shows that, three-dimensional divergence includes not only horizontal convergence/divergence effect of wind field and the shear of vertical velocity, but also the mass field. It reflects the interaction between three-dimensional divergence in theory. Although the horizontal divergence is basically negative within precipitation regions in the frontal rainfall case, the coverage area (negative horizontal divergence zone) is far larger than the precipitation region. For heavy rainfall events, thus, the three-dimensional divergence is superior to horizontal divergence in the diagnosis of precipitation.

The better detect of the rainfall by nonzero zone of mass divergence field in the middle and lower troposphere is due to the evaporation in the lower troposphere and the condensation in the middle and upper troposphere determined by the vertical velocity that forms cloud. The cloud-induced mass forcing also leads to the coupling pattern of threedimensional divergence in the lower levels and three-dimensional convergence in the upper levels, accompanying with heavy precipitation. The three-dimensional divergence equation is derived to identify the major factors controlling the tendency of three-dimensional divergence. The calculations show that the advection of three-dimensional divergence, the term associated with the interaction between vertical vorticity and Coriolis force, the shear of three-dimensional wind vector, baroclinic term are the major factors controlling the local change of three-dimensional divergence. **Key words** three-dimensional, divergence, equation, diagnosis

## 1 引言

以前人们对暴雨的研究,常从其影响的天气系 统着手,分析低涡、切变线、锋面、高低空急流等 天气系统对暴雨的影响<sup>[1~5]</sup>;或者从风场的微分性 质出发,探求垂直相对涡度、水平散度和变形场在 暴雨发生、发展过程中的作用<sup>[6]</sup>;或者研究暴雨系 统的平衡和非平衡性,比如位涡、湿位涡<sup>[7~13]</sup>,非 地转Q矢量、湿Q矢量<sup>[14]</sup>、C矢量<sup>[15]</sup>等;或者分析 湿大气的稳定性<sup>[16,17]</sup>。关于暴雨的研究可谓方方 面面,但事实上迄今为止,并未找到一个可与暴雨 移动及落区对应很好的诊断物理量。

Qiu 等<sup>[18]</sup>用数值实验研究了质量源汇项对降水的影响,发现若不考虑源汇项,模式模拟的降水减少。Gao 等<sup>[19]</sup>研究了强暴雨过程中云导致的质量强迫对湿位涡异常发展的影响,指出,由于暴雨系统内带有强降水,引起暴雨系统中质量场发生明显变化,使得质量守恒定律被破坏。质量连续方程变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = S,$$

其中,S是源汇项,S= $-\nabla \cdot (\rho_r \mathbf{V}_t)$ ,  $\rho_r$ 是水凝物密 度, V<sub>t</sub>是雨滴下落末速度; ρ是总的湿空气密度。 从而通常连续方程的右侧出现了源汇项,导致 ∇•V 不等于零。因此, 有必要分析三维散度场的演 变与暴雨发生发展的关系。二维的水平散度场只考 虑了水平风场的辐合辐散,而三维散度场不仅包含 风场的辐合辐散效应,而且考虑了由于强降水引起 的质量强迫,所以它体现了动力场和质量场的综合 效应,是一个比二维散度场更完备的物理量。特别 是在研究大暴雨过程时,二维散度大的地方并不一 定有大暴雨发生,而三维散度大的地方,一般有明 显的质量强迫,往往有大暴雨发生。因此,有必要 对暴雨特别是大暴雨过程中三维散度场的演变进行 诊断分析。所以,本文的第2节利用 WRF 模式对 2003年7月4日00时~5日12时(国际协调时, 下同)我国江淮地区的一次暴雨过程进行了数值模 拟,以获得可用于对三维散度场进行诊断分析的可 信的高时空分辨率资料。第3节对三维散度场在暴 雨发生发展过程中的特点和作用进行了诊断分析; 第4节推导了三维散度方程,并对方程中除摩擦力 之外各项进行了计算,找出三维散度演变的主要影 响因子;第5节是小结。

### 2 数值模拟

为了抓住三维散度场的中尺度特征,获得可用 于对三维散度场进行诊断分析的非地转非静力平衡 的高时空分辨率资料,本文利用三维非静力 WRF 模式对 2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时我国江淮 地区的暴雨过程进行了数值模拟,并利用该模式输 出的高时空分辨率资料,分析三维散度的时空分布 特征与地面累积 6 小时降水的关系。

#### 2.1 环流背景

2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时的降水过程 是一次典型的江淮梅雨锋暴雨。700 hPa、33°N~ 36°N 江淮地区有东北-西南向的等位温(θ<sub>e</sub>)线密 集带(图 1a),且在该纬度范围内有一与等θ<sub>e</sub>线密 集带走向一致、位置亦吻合较好的东北气流和西南 低空急流的汇合切变线(图 1b)。同时,雨区处于 对流层高层 200 hPa 南亚高压东北侧的辐散气流 (图略)控制之下,高、低空环流形势为此次暴雨的 发生发展提供了有利的环流背景。

#### 2.2 数值模拟

2.2.1 模式简介和模拟方案设计及资料

WRF (Weather Research and Forecasting) 模 式是美国 NCAR、NOAA、FSL (the Forecast System Laboratory) 以及 Oklahoma 大学 CAPS (the Center for Analysis and Prediction of Storms) 联合 了多个科研机构开发的新一代中尺度数值模式。现 在许多机构如 NCAR、AFWA (Air Force Weather Agency)、FSL 和 Illinois 大学等都开展了 WRF 的 实际业务和科研应用。而且 WRF 模式在热带气 旋、空气质量与大气化学、区域气候模拟等方面亦 有广泛的应用。WRF 的设计使用了"层次软件结 构",输入输出部分设计成"外部程序包 (External Packages)",利用 net CDF 文件系统,使得输入输 出数据的修改简单易行。

模式采用全可压、非静力方程和 Arakawa C 格 点。本次模拟选用质量坐标 (Eulerian mass coordinate), Runge-Kutta 的 3 阶时间积分方案<sup>[20]</sup>,模 式微物理过程运用 Ferrier 方案<sup>[21]</sup>和 Kain-Fritsch 积云对流参数化方案<sup>[22]</sup>;同时采用 MRF 边界层方 案<sup>[23]</sup>、Dudhia 短波辐射<sup>[24]</sup>和 RRTM 长波辐射方 案<sup>[25]</sup>。选用 1°×1°的 NCEP/NCAR (National Center for Environmental Prediction/National Center for Atmospheric Research)资料 (间隔 6 h) 作 为初始场进行模拟。模式积分区域中心为 (32°N, 117°E), 网格点数为 181×161, 水平格距为27 km, 垂直方向分为 31 个不等距的  $\sigma$  层,时间积分步长 120 s,模拟的初始时间为 2003 年 7 月 4 日 00 时, 共积分 36 h。模式输出资料间隔为 20 min。 2.2.2 模拟结果与实况的对比分析

图 2 为 2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时实际 观测和模拟的 36 h 地面累积降水量的分布,由图可







图 2 长江中下游地区 2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时 36 小时的地面累积降水(单位:mm): (a) 观测; (b) 模拟 Fig. 2 The observed (a) and simulated (b) 36-hour cumulative rainfall (mm) over the middle and lower reaches of the Yangtze River from 0000 UTC 4 to 1200 UTC 5 Jul 2003

见,陆地上,模拟和实况降水量分布图上江淮流域最 大降水中心分别位于(32°N,118°E)和(31.5°N, 119°E),二者在位置上偏差较小,且模拟的降水量 偏小。但江淮流域一带,模拟的36h累积地面降 水带的走向与实际雨带基本一致,均为东北-西南 向,降水落区在陆地上的部分非常吻合,均位于 27°N~33°N之间。此外,我国东北地区及朝鲜半岛 境内的片状降水区亦模拟得较好,但33°N~42°N之间零星分布的小雨团的模拟与实况的对应在位置上并不理想。就整个模拟区域来说,江淮流域雨带模拟得最好。此外,模式模拟的位势高度场、流场、水平风场、温度场等与实况均较吻合(图略),这里不再详述。

通过以上对比分析,我们认为,WRF 模式模



图 3 2003 年 7 月模拟的长江中下游地区累积 6 小时降水 (单位: mm): (a) 4 日 12~18 时; (b) 4 日 18 时~5 日 00 时 Fig. 3 The simulated 6-hour rainfall (mm) over the middle and lower reaches of the Yangtze River: (a) 1200 UTC to 1800 UTC 4 Jul 2003; (b) 1800 UTC 4 Jul to 0000 UTC 5 Jul 2003

拟的此次过程无论降水(特别是江淮流域的降水带)、大气热力场还是动力场都比较成功,因此我们下面用来作诊断分析的WRF模式输出资料(特别是江淮流域所属范围内的模式输出资料)是可信的。

### 3 三维散度场的诊断分析

本节将用模式输出资料计算三维散度场,分析 三维散度场与地面 6 h 降水的关系。

本次降水过程的最大累积 6 小时时段降水发生 在 2003 年 7 月 4 日 18 时~5 日 00 时。图 3 是模拟 的此时段降水量的分布。图 4 是利用模式输出资料 计算的过 118°E 的三维散度的纬度-高度剖面图。 雨区附近[雨团中心位于(31.7°N,118°E)]上空的 三维散度大值带几乎垂直分布,2~6 km 的高度范 围(800~500 hPa)为正的三维散度大值带,其大 值中心位于 31.7°N,约 4 km,其上 12 km 高度层 和其下 2 km 以下的高度层分别有一负的三维散度 值中心。4 km (600 hPa)高度处的三维散度绝对 值最大,因此,分析了 4.287 km (约 600 hPa)高 度层附近三维散度场的分布(图 5)。

对比图 3b 和图 5b 发现,本次降水过程中江淮 流域降水落区、雨带走向和范围均与 4.287 km 高 度层的三维散度非零值带有很好的对应,二者皆为 东北东-西南西走向。雨带断裂为 117°E 以东和



171

图 4 2003 年 7 月 5 日 00 时过 118°E 的三维散度的纬度-高度 剖面图

Fig. 4 The meridional – vertical cross section along 118°E of three-dimensional divergence at 0000 UTC 5 Jul 2003

112°E以西两条,而112°E~117°E之间的无雨区恰 好为三维散度的零值区,两侧的雨区为三维散度的 非零带。(31.7°N,118°E)处的三维散度极值中心 与暴雨大值中心重合。本次降水过程中,降水量的 增减亦伴随着三维散度强度的变化 [图 5a,4 日 18 时 114°E 以东的雨区 (图 3a)对应的三维散度非零 带的绝对值远小于 5 日 00 时的值,其他时次的图 略]。6小时时段降水于5日00时达到最大(图3b), 4.287 km高度层的三维散度同时达至最强(图5b)。

至于 4.287 km 高度层 36°N 及其以北的三维 散度非零区,并不对应雨区。这可能是因为模拟的 降水偏差所致,累积 36 h 的实况降水量分布图(图 2a)上,此区域亦有降水发生。而东北地区破碎的 雨区,亦有零星分布的正、负散度非零区与之对 应。总的来说,江淮流域的降水模拟最好,用模式 输出结果计算的该区域的三维散度场非零带与雨带 也吻合得最好。

再看 5 日 00 时 3.247 km (约 700 hPa, 图略)、 1.476 km (约 850 hPa, 图 6a)、6.379 km (约 525 hPa,



图 5 4.287 km 高度层上的三维散度分布: (a) 4 日 18 时; (b) 5 日 00 时

Fig. 5 The three-dimensional divergence field distribution at 4. 287 km level: (a) 1800 UTC 4 Jul; (b) 0000 UTC 5 Jul





图 6b) 高度层三维散度场的分布。三个层面上江 淮流域的雨区均有与雨带走向一致的三维散度非零 带,但范围较 4.287 km (约 600 hPa) 偏大,且雨 带南部有零星分布的非零散度区,即使与雨区范围 较一致的 3.247 km 层,江淮流域的三维散度非零 区呈一完整的带状,涵盖了 112°E~117°E之间无 雨区的范围。所以,这几个层次的三维散度非零区 远大于雨区。

对7月4日00~5日12时各层的三维散度求时间平均,亦发现4.287 km的三维散度非零区(见图7a,空白区为大片散度零值区,这里零线未画出)与雨区(模拟的36h降水,图2b)基本对应,特别是在江淮流域的范围吻合较好。类似的,对该时段的三维散度场的绝对值作时间平均,亦发现在雨区有一条三维散度绝对值大值带(见图7b阴影部分)存在。

综合以上分析, 江淮流域一带, 对流层中低层 尤其是 4.287 km 的三维散度非零区与雨带非常吻 合, 而无雨的区域为大面积的三维散度零值区。为 什么三维散度场能较好地诊断降水?为了回答这个 问题, 我们沿 118°E 作了三维散度的水平(即水平 散度)和垂直(即垂直风速的垂直伸展项)分量的 经向垂直剖面图(7月5日00时)。雨区附近, 对 流层低层的水平辐合与高层的水平辐散相耦合(图 8a),三维散度的垂直分量与水平分量反位相分布 (图 8a、b)。7 km以下,上升运动随高度增大导致 了垂直方向的辐散(图 8b),7 km以上反之。本文 降水个例中,三维散度由其水平和垂直分量的余差 决定,其符号取决于垂直分量(图 8a、b 和图 4)。

173

3 km 以上,强上升气流(图 9)使空气冷却降 温,使水汽凝结形成云水和雨水(图 10a 阴影区)。 由于水汽的凝结,加强了湿空气向这个区域的三维 辐合(图 4 中三维散度负值区)。同时,3 km 以下 的下沉气流使空气增温变暖,水汽蒸发,使得对流 层低层的云水、雨水减少,同时抬升了云核的高 度,使之从 5 km 上升到 6 km (图 10a、b)。由于蒸 发,丰沛的水汽导致了对流层低层的三维辐散(图 4 中三维散度正值区)。总之,图 4 中三维散度的垂 直分布是由对流层低层的水汽蒸发和对流层中高层 的水汽凝结所致。水汽的低层蒸发、高层凝结形成 了云,而云导致的质量强迫对三维散度的这种上负 下正的分布又有正反馈的作用。这为降水的发生发 展提供了有利条件。

可见,三维散度不仅考虑了大气的动力效应 (水平风场的辐合辐散、垂直风速的垂直伸展),而 且综合考虑了质量场的影响(云导致的质量强迫), 比单纯的水平散度场包含了更多的信息,因此在理 论上优越于水平散度。对比分析本次降水个例中的



图 7 4.287 km 高度层上三维散度 (a) 及三维散度绝对值 (b) 的时间平均 (2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时) (单位: 10<sup>-5</sup>s<sup>-1</sup>) Fig. 7 The time-mean of (a) three-dimensional divergence and (b) three-dimensional divergence absolute value at 4.287 km level from 0000 UTC 4 to 1200 UTC 5 Jul 2003



图 8 2003 年7月3日 00 时外平散度 (a) 及三维散度垂直分重 (b) 石 118 E 时经问垂直时面图 Fig. 8 The meridional-vertical cross section of (a) the horizontal divergence and (b) the vertical component of three-dimensional divergence along 118°E at 0000 UTC 5 Jul 2003



图 9 2003 年 7 月 5 日 00 时垂直速度沿 118°E 的经向垂直剖面 图

Fig. 9 The meridional – vertical cross section of vertical velocity along 118°E at 0000 UTC 5 Jul 2003

三维散度(图 5b、图 6a)和水平散度(图 11a、b), 虽然对流层中低层的水平散度负值区基本对应雨 区,但其范围远大于雨区,不及三维散度与雨区范 围的对应。可见,对于有质量强迫的大暴雨过程, 用三维散度场来诊断降水比水平散度具有优势。由 以上分析可见,三维散度场是一个诊断降水的较好 的物理量,因此,有必要推导三维散度方程。

### 4 三维散度方程

z坐标下的运动方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, (1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu &= -\alpha \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, (2) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + F_z, (3) \\ \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1) + \frac{\partial}{\partial y}(2) + \frac{\partial}{\partial z}(3),$$

得到  

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{3}D + \beta_{0}u - f\zeta = -\alpha \nabla_{3}^{2}p -$$
  
 $\nabla_{3}\alpha \cdot \nabla_{3}p - \nabla_{3}u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - \nabla_{3}v \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} -$   
 $\nabla_{3}w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \nabla_{3} \cdot \mathbf{F},$ 
(4)

其中,

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

为三维散度,

$$\nabla_{3} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$V 是三维风矢量, a=1/\rho为比容。-V • \nabla_3 D =-\left(u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + w \frac{\partial D}{\partial z}\right),-\nabla_3 u • \frac{\partial V}{\partial x} =-\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}\right),-\nabla_3 v • \frac{\partial V}{\partial y} =-\left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$



图 10 7月5日云水、雨水、冰水、雪、霰等水凝物的总混合比(阴影)及这些水凝物和水汽混合比的和(等值线)沿118°E的经向垂直剖 面图: (a) 0000时; (b) 0600时

Fig. 10 The meridional – vertical cross sections of the total mixing ratios of water condensate including cloud water, raindrop, ice, snow and graupel (shading) and the sum of mixing ratios of these water condensate and vapor (isoline) along 118°E at (a) 0000 UTC 5 Jul and (b) 0600 UTC 5 Jul

$$-\nabla_{3}w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

整理(4)式两端,可以得到:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{3} D + \beta_{0} u - f \boldsymbol{\zeta} = -\nabla_{3}^{2} \frac{p}{\rho} - \nabla_{3} \cdot \left(\frac{p}{\rho} \nabla_{3} \ln \rho\right) - \nabla_{3} u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - \nabla_{3} v \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \nabla_{3} w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \nabla_{3} \cdot \mathbf{F}.$$
(5)

对于未饱和湿大气,应考虑湿空气状态方程:

$$p = \rho_{\rm d} R_{\rm d} T + \rho_{\rm v} R_{\rm v} T, \qquad (6)$$

若记总的湿空气密度为 $\rho = \rho_d + \rho_v$ ,则(6)式可化为

$$p = \rho R_{\rm d} T \left( \frac{\rho_{\rm d}}{\rho_{\rm d} + \rho_{\rm v}} + \frac{\rho_{\rm v}}{\rho_{\rm d} + \rho_{\rm v}} R_{\rm v} / R_{\rm d} \right).$$
(7)

Ŷ

$$\epsilon = rac{R_{
m d}}{R_{
m v}} = 0.622,$$

并把比湿

$$q = \frac{\rho_{v}}{\rho_{d} + \rho_{v}}$$
  
代人上式,则 (7)式变为  
 $p = \rho R_{d} T (1 + 0.6077q),$  (8)

相应地有

$$\frac{p}{\rho} = R_{\rm d} T \ (1+0.\ 6077q). \tag{9}$$

另外根据比湿的定义,比湿还可以写为

$$q = \frac{e}{R_{\rm v} T \rho},\tag{10}$$

其中 e 为水汽压。相应的, 总的湿空气密度为

$$\rho = \frac{0.622e}{R_{\rm d}Tq}.\tag{11}$$

把(9)和(11)式代入(5)式,则得到未饱和湿空 气的三维散度方程:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{3} D + \beta_{0} u - f\zeta = -\nabla_{3}^{2} [R_{d} T (1 + 0. \ 6077q)] - \nabla_{3} \cdot \left[ R_{d} T (1 + 0. \ 6077q) \nabla_{3} \ln \frac{0. \ 622e}{R_{d} Tq} \right] - \nabla_{3} u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - \nabla_{3} v \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \nabla_{3} w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \nabla_{3} \cdot \mathbf{F}.$$
(12)

对于饱和湿空气,只要将湿空气的比湿和水汽 压变为饱和比湿和饱和水汽压,就可以得到饱和湿 空气下的三维散度方程为

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{3} D + \beta_{0} u - f \boldsymbol{\zeta} = - \nabla_{3}^{2} [R_{d} T (1 + 0.6077 q_{s})] - \nabla_{3} \cdot [R_{d} T (1 + 0.6077 q_{s}) \nabla_{3} \ln \frac{0.622 e_{s}}{R_{d} T q_{s}}] - \nabla_{3} u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - \nabla_{3} v \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \nabla_{3} w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \nabla_{3} \cdot \mathbf{F},$$
(13)

其中, q<sub>s</sub> 为饱和比湿, e<sub>s</sub> 为饱和水汽压。

(14)



图 11 2003 年 7 月 5 日 00 时水平散度: (a) 4.287 km 高度层; (b) 1.476 km 高度层 Fig. 11 The horizontal divergence distributions at 4.287 km level (a) and 1.476 km level (b) at 0000 UTC 5 Jul 2003.

对于未饱和湿空气的三维散度方程,将局地变化项以外的其他项移到方程的右端,得到

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla_{3} D - \beta_{0} u + f\zeta + \left(-\nabla_{3} u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} - \nabla_{3} v \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \nabla_{3} w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\right) -$$
term1 term2 term3 term4
$$\nabla_{3}^{2} \left[R_{d} T(1+0.\ 6077q)\right] - \nabla_{3} \cdot \left[R_{d} T(1+0.\ 6077q) \nabla_{3} \ln \frac{0.\ 622e}{R_{d} Tq}\right] + \nabla_{3} \cdot \mathbf{F}.$$
term5

由方程(14)可见,三维散度方程的局地变化 项与平流项(term1)、β效应项(term2)、垂直相对 涡度和科里奥利力共同作用项(term3)、三维风场 的切变项(term4)、斜压项(term5)、摩擦力项有 关。下面将利用 WRF 模式的高时空分辨率输出资 料,分析影响三维散度场变化的主要因子。

图  $12a \sim e \neq 2003 \pm 7 f + f = 00$ 时~5 f = 12 时三维散度方程(14)中除摩擦力以外的各项沿 118°E的时间-纬度剖面图。图 12f 为同时段沿 118°E的方程(14)中右端除摩擦力之外的各项之 和 sum(sum = term1 + term2 + term3 + term4 + term5)的时间-纬度剖面图。由图 12 可见,term1、 term3、term4 和 term5 与 sum 项量级相当,均为  $10^{-8} s^{-2}$ ,而其余项比它们小 1~2个量级,所以平 流项、垂直相对涡度和科里奥利力作用项、三维风 速切变项、斜压项是影响三维散度变化的主要因 子。江淮雨区 sum 项非零区的分布由 4 日 00 时位 于 33°N~36°N 之间, 后渐向南移至 33°N 以南, 且 其 sum 项的绝对值于 4 日 18 时之后明显增大。 term1、term3、term4 和 term5 的大值区也出现在 4 日 18 时~5 日 00 时之间, 且于 4 日 18 时之后移至 33°N 以南。

值得注意的是,term1 非零区只在4日18时之 后才开始出现(图12a),位于33°N~31.5°N之间, 5日00时之后南移,继而推移到30°N。由前面的 降水分析可知,4日18时之后降水明显增幅,可见 平流项在降水增幅阶段直接影响三维散度场的变 化,而term3和term4项从降水初期就一直影响三 维散度场的发展和移动(图12c、d)。term5项也只 是在降水最大的5日00时才达到10<sup>-8</sup>s<sup>-2</sup>的量级, 说明它对降水的增幅有一定的指示作用。

方程(14)右端各项之和与三维散度局地变化 项量级一致,能较好地表征三维散度的变化。同 时,也说明用于计算的这套中尺度资料适用于方程



图 12 2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时 4.287 km 高度层上沿 118°E 的时间-经向剖面图: (a) term1; (b) term2 (单位: 10<sup>-10</sup> s<sup>-2</sup>); (c) term3; (d) term4; (e) term5; (f) sum

Fig. 12 The time-meridional section along  $118^{\circ}$ E of (a) term 1, (b) term 2 ( $10^{-10}$  s<sup>-2</sup>), (c) term 3, (d) term 4, (e) term 5, (f) sum at 4. 287 km level from 0000 UTC 4 to 1200 UTC 5 Jul 2003



图 13 2003 年 7 月 4 日 18 时 4.287 km 高度层上三维散度的 时间倾向项

Fig. 13 Time tendency term of three-dimensional divergence at 4. 287 km level at 1800 UTC 4 Jul 2003



图 14 沿 118°E 的三维散度预报场的时间--经向剖面图 Fig. 14 The time-meridional section along 118°E of the prognostic three-dimensional divergence

(14),反过来说明推导的三维散度方程适合用于作中尺度系统的分析。而其中平流项、垂直相对涡度和科里奥利力作用项、三维风速切变项、斜压项是



图 15 Time (UTC) 沿 118°E 模拟的累积 6 小时地面降水的时间--经向剖面图 (单位: mm)

Fig. 15  $\,$  The time-meridional cross section along 118°E of simulated cumulative 6-hour precipitation (mm)

#### 影响三维散度变化的主要因子。

若用 6 小时平均的三维散度场对 6 小时降水作 出预报,由 4 日 18 时的三维散度 (6 小时平均场)的 时间倾向项 (图 13)可见,江淮流域三维散度局地变 化项非零带恰好对应 5 日 00 时的雨带,112°N~ 116°N之间的三维散度零值区与断开的雨带的无雨 区重合。

对推导的三维散度方程[方程(14)]用间隔为 20 min 的模式输出资料进行积分,从而得到三维散 度的预报场(如图 14 所示)。它在江淮流域的时空 分布与降水的分布(图 15)基本一致,均由 36°N~ 33°N之间渐移至 33°N以南,且三维散度于 4 日 22 时之后增大一个量级,5 日 00 时达最大值,地面 6 h降水也同时达最大值,超过 25 mm。这说明三 维散度可能是一个较好的降水预报因子。

### 5 小结

本文利用三维非静力 WRF 模式,对 2003 年 7 月 4 日 00 时~5 日 12 时我国江淮地区一次典型的 江淮梅雨锋暴雨过程进行了数值模拟。在 WRF 模 式模拟结果比较可信的前提下,利用该模式输出的 高时空分辨率资料,分析了三维散度的时空分布特 征与地面累积 6 小时降水的关系。

分析发现, 江淮流域一带, 对流层中低层尤其 是 4.287 km 的三维散度非零区与降水有很好的对 应关系, 暴雨大值中心与散度极值中心重合。降水 量的增减与三维散度强度变化一致。而无雨的区域 为大面积的三维散度零值区。为什么三维散度场能 较好地诊断降水?这是因为对流层低层的水汽蒸发 和对流层中高层的水汽凝结形成了云,而云导致的 质量强迫对三维散度的这种上负下正的分布又有正 反馈的作用,这为降水的发生发展提供了有利条件。

在以上分析的基础上,推导了三维散度方程。 利用模式输出的高时空分辨率资料,计算了方程 (14)中除摩擦力之外的各项,找出影响三维散度 变化的主要因子。

本文只选取一个暴雨个例对三维散度场与降水 的关系进行了诊断分析。选取雨带走向不同、分布 在不同地区的多个暴雨个例,来验证三维散度与降 水的关系,推导质量强迫下的三维散度方程,并对 其作进一步的分析,是我们下一步要做的工作。

#### 参考文献 (References)

- [1] Robert N L. Shear line weather regime over Hawaii. Mon.
   Wea. Rev., 1976, 104 (8): 1081~1083
- [2] Dayan U, Abramski R. Heavy rain in the Middle East related to unusual jet stream properties. Bull. Amer. Meteor. Soc., 1983, 64 (10): 1138~1140
- [3] Wang B, Orlanski I. Study of a heavy rain vortex formed over the eastern flank of the Tibetan Plateau. Mon. Wea. Rev., 1987, 115 (7): 1370~1393
- Davidson N E, Kurihara K, Teruyuki K, et al. Dynamics and prediction of a mesoscale extreme rain event in the Baiu front over Kyushu, Japan. Mon. Wea. Rev., 1998, 126 (6): 1608~1629
- [5] Thibaut M, Lafore J P, Redelsperger J L. A tropical squall line observed during TOGA COARE: Extended comparisons between simulations and Doppler radar data and the role of midlevel wind shear. Mon. Wea. Rev., 2000, 128 (11): 3709~3730
- [6] Keyser D, Michael J P, Shapiro M A. Diagnosis of the role of vertical deformation in a two-dimensional primitive equation model of upper-level frontogenesis. J. Atmos. Sci., 1986, 43 (8): 839~850
- [7] Emanuel K A. Inertial instability and mesoscale convective systems. Part I: Linear theory of inertial instability in rotating viscous fluids. J. Atmos. Sci., 1979, 36: 2425~2449
- Bennetts D A, Hoskins B J. Conditional symmetric instability—A possible explanation for frontal rainbands. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 1979, 105: 945~962
- [9] Danielsen E F, Hipskind R S. Stratospheric-tropospheric exchange at polar latitudes in summer. J. Geophys. Res.,

1980, **85:** 393~400

[10] Thorpe A J. Diagnosis of balanced vortex structure using potential vorticity. J. Atmos. Sci., 1985, 42: 397~406

179

- [11] Hoskins B J, Berridford P. A potential-vorticity perspective of the storm of 15 - 16 October 1987. Weather, 1988, 42: 122~129
- [12] Chan Douglas S T, Cho H R. Meso-β scale potential vorticity anomalies and rainbands. Part I: Adiabatic dynamics of potential vorticity anomalies. J. Atmos. Sci., 1989, 46 (12): 1713~1723
- Xu Q. Formation and evolution of frontal rainbands and geostrophic potential vorticity anomalies. J. Atmos. Sci., 1992, 49: 629~648
- [14] Michael C M. Using piecewise potential vorticity inversion to diagnose frontogenesis. Part I: A partitioning of the Q vector applied to diagnosing surface frontogenesis and vertical motion. Mon. Wea. Rev., 1999, 127 (12): 2796~2821
- Xu Q. Ageostrophic pseudovorticity and geostrophic C-vector forcing—A new look at the Q vector in three dimensions. J. Atmos. Sci. 1992, 49 (12): 981~990
- [16] Benilov E S. Stability of a two-layer quasigeostrophic vortex over axisymmetric localized topography. Journal of Physical Oceanography. 2005, 35 (1): 123~130
- [17] Christos M M, Robinson W A. Atmospheric stability in a generalized barotropic model. J. Atmos. Sci., 2005, 62 (2): 476~491
- [18] Qiu C J, Bao J W, Xu Q. Is the mass sink due to precipitation negligible? Mon. Wea. Rev., 1993, 121: 853~857
- [19] Gao S T, Zhou Y S, Cui X P. Impacts of cloud-induced mass forcing on the development of moist potential vorticity anomaly during torrential. Adv. Atmos. Sci., 2004, 21 (6): 923~927
- [20] Louis J W, William C S. Time-splitting methods for elastic models using forward time schemes. Mon. Wea. Rev., 2002, 130 (8): 2088~2097
- [21] Ryan B F. On the global variation of precipitation layer clouds. Bull. Amer. Meteor. Soc., 1996, 77 (1): 53~70
- [22] Kain J S, Fritsch J M. A one-dimensional entraining/detraining plume model and its application in convective parameterization. J. Atmos. Sci., 1990, 47 (23): 2784~2802
- [23] Hong S Y, Pan H L. Nonlocal boundary layer vertical diffusion in a medium-range forecast model. Mon. Wea. Rev., 1996, 124 (10): 2322~2339
- [24] Dudhia J. Numerical study of convection observed during the winter monsoon experiment using a mesoscale two-dimensional model. J. Atmos. Sci., 1989, 46 (20): 3077~3107
- [25] Mlawer E J, Taubman S J, Brown P D, et al. Radiative transfer for inhomogeneous atmosphere: RRTM, a validated correlated-k model for the long-wave. J. Geophys. Res., 1997, 102 (D14): 16633~16682