

有关地理纬度和地心纬度的换算问题

张 少 泉

(国家地震局 地球物理研究所)

摘 要

本文简要地从地理纬度 α 与地心纬度 ϕ 的基本换算公式导出它的近似公式,并用最新的地球扁率值 e 给出基本公式中和近似公式中的换算系数 β 和 γ ,进而给出 $\alpha-\phi$ 的换算新表。新旧两表最大可差5角秒(对应地面距离达150米)。这在一些对纬度换算精度要求较高的地学问题中是不容忽视的。本文最后还对近似公式做了简要讨论。

一、引 言

在有关全球性的地学问题中,例如:制定全球地震走时表,测定全球板块的相对运动速度,计算钱德勒晃动频谱,以及全球磁场分布特征等,经常需要将地面观测点的地理纬度 α 换算成地心纬度 ϕ 。目前,国内外通用以下两个公式^[1、2]:

$$\operatorname{tg} \phi = 0.993277 \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

和
$$\phi = \alpha - 11.7 \sin 2\alpha \quad (2)$$

以及根据这两个公式算出的速查简表^[3]。

但是,公式(1)、(2)中的系数是依据早期测定的地球扁率 e 确定的,显得过于陈旧。因而有必要根据卫星轨道测定的新的地球扁率值对公式中的系数予以修正。

此外,在利用公式(1)或(2)进行纬度换算中,经常遇到这样的问题:这两公式有什么区别?公式中的系数是怎样确定的?对于公式(1),一般可从地学教科书中查到。然而公式(2)的简明推导尚不多见。因此对公式(2)的来源,式中系数的确定,以及该式以角分(')为单位感到疑惑不解。本文针对这些问题加以研究。

二、近似公式

众所周知,地球的形状可以用一个旋转椭球体作为一级近似。取 c 为极半轴, a 为赤道面的长半轴,并取 Z 轴为地球自转轴, X 为赤道面内某一坐标轴,从而有:

$$(X/a)^2 + (Z/c)^2 = 1$$

取 ϕ 为地心纬度, 即 $\operatorname{tg}\phi = z/x$; 又取 α 为地理纬度, 即 $\operatorname{tg}\alpha = -dx/dz$ 。对(3)式两端微分, 并将 ϕ 、 α 关系式代入, 可得

$$\operatorname{tg}\phi = (c^2/a_2) \operatorname{tg}\alpha$$

根据扁度 e 的定义, $e = (a - c)/a$, 则(4)式可写成

$$\operatorname{tg}\phi = (1 - e)^2 \operatorname{tg}\alpha$$

或者

$$\operatorname{tg}\phi = \beta \operatorname{tg}\alpha \quad (3)$$

式中

$$\beta = (1 - e)^2 \quad (4)$$

显然(3)式是(1)式的一般形式, 式中 β 称为基本公式的换算系数。当 $e = 1/297$ 时, $\beta = 0.993277$, 这恰是(1)式中的系数。

下面从公式(3)出发, 导出它的近似公式。首先, 将(3)式写成

$$\sin\phi \cdot \cos\alpha = \beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\phi$$

利用角的和差公式, 进而写成

$$\sin(\alpha - \phi) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \sin(\alpha + \phi) \quad (5)$$

因为地心纬度 ϕ 与地理纬度 α 相差很小(最大不超过 $11' \sim 12'$), 在此条件下, 可以取

$$\sin(\alpha - \phi) \doteq \alpha - \phi \quad (6)$$

和

$$\sin(\alpha + \phi) \doteq \sin 2\alpha \quad (7)$$

式(6)的右端为弧度, 欲变成度分秒制的角分('), 则需乘以一个单位变换常数 $180 \times 60/\pi$ 。据此, 可将(5)式写成

$$\alpha - \phi = \gamma \sin 2\alpha \quad (8)$$

式中

$$\gamma = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \cdot \frac{180 \times 60}{\pi} \quad (9)$$

或者

$$\phi = \alpha - \gamma \sin 2\alpha \quad (10)$$

显然, 式(10)是式(2)的一般形式, 式中 γ 称为近似公式的换算系数。若利用表1所给的克拉克(1866年)扁率值 $e = 1/295$, 代入式(4), 进而代入(9)式, 可得 $\gamma = 11.6731 \doteq 11.7$, 该值恰为公式(2)中的系数。

三、换算系数

通过上述推导及最后公式(3)、(4), 以及(9)、(10)可知, 决定纬度换算系数 β 和 γ 的是地球扁率 e 。地球扁率 e 是描述地球形状的一个重要参量, 它可以采用天文大地法、地面重力测量法和卫星轨道法加以确定^[5、6]。为了测准地球扁率, 许多学者进行了大量实地测量和理论研究^[4]。表1给出有关地球扁率的测定简史。其中, 除早期的牛顿(1687年)和勒让德(1789年)测定值过大或过小之外, 后来一般在 290^{-1} 和 300^{-1} 之间变动, 而且测量精度不断提高。本世纪五十年代人造地球卫星出现后, 通过监测卫星轨道由于地球赤道凸起(扁球体)而引起的变动, 可以更精确算出地球扁率, 其精度要比传统的天文大地法和地面重力测量法的精度提高两个量级。最近的数值是1977年卫星轨道测定结果: $e = 298.256^{-1}$ 。

显然, 公式(1)和(2)中的系数 β 和 γ 是根据早一些时候的地球扁率值 e 得到的。我

们可以而且应当用最新的地球扁率值算出相应的 β 和 γ 。

对于 β 值，可以用公式(4)计算出来。本文算出表1中不同扁率 e 所对应的 β 值，并列在该表 β 值一栏。

对于 γ 值，虽然可以用公式(9)及 β 值进而算出 γ 值，但考虑该式是在一定近似条件下导出的，采用该式，不可避免地会影响 γ 值的精度。为此，本文采用下面的办法：根据(10)式可知

$$\gamma = (\alpha - \phi) |_{\alpha=45^\circ}$$

又由(3)式可知，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，

$$(\alpha - \phi) |_{\alpha=45^\circ} = (45 - \text{tg}^{-1}\beta) \times 60$$

由此两式，便可得到如下公式

$$\gamma = (45 - \text{tg}^{-1}\beta) \times 60 \quad (11)$$

地球扁率的测定简史及相应的换算系数 β 和 γ 数值

表1

No	来源	年代	e^{-1}	β	$\gamma(^{\circ})$
1	牛顿(Newton)	1687	239	0.991649	14.4138
2	勒让德(Legendre)	1789	318	0.993720	10.8275
3	贝塞尔(Bessel)	1841	299	0.993322	11.5167
4	克拉克(Clark)	1866	295	0.993232	11.6731
5	赫尔墨特(Helmert)	1901	298.2	0.993304	11.5736
6	海福特(Hayford)	1909	297.0	0.993277	11.5943
7	鲍伊(Bowie)	1923	297.5	0.993289	11.5748
8	海斯坎宁(Heiskanen)	1928	297.1	0.993280	11.5904
9	国际椭球	1930	297.0	0.993277	11.5943
10	克拉索夫斯基(Krassovsky)	1933	295.3	0.993239	11.6612
11	杰弗瑞斯(Jeffreys)	1943	297.1	0.993280	11.5903
12	流体静力学地球	1965	299.8	0.993340	11.4859
13	卫星测定	1967	298.247	0.99330539	11.54967
14	卫星测定	1977	298.256	0.99330559	11.54544

$\alpha - \phi$ 换算新表($e = 298.256^{-1}$, $\alpha - \phi = 11.54544 \sin 2\alpha$)

表2

α_1	$\alpha - \phi$		α_2	α_1	$\alpha - \phi$		α_2	α_1	$\alpha - \phi$		α_2
($^{\circ}$)	($'$)	($''$)	($^{\circ}$)	($^{\circ}$)	($'$)	($''$)	($^{\circ}$)	($^{\circ}$)	($'$)	($''$)	($^{\circ}$)
1	00	27.18	89	16	06	07.09	74	31	10	11.64	59
2	00	48.32	88	17	06	27.37	73	32	10	22.62	58
3	01	12.41	87	18	06	47.17	72	33	10	32.84	57
4	01	36.41	86	19	07	06.49	71	34	10	42.29	56
5	02	00.29	85	20	07	25.28	70	35	10	50.95	55
6	02	24.03	84	21	07	43.52	69	36	10	58.82	54
7	02	47.59	83	22	08	01.21	68	37	11	05.89	53
8	03	10.44	82	23	08	18.31	67	38	11	12.15	52
9	03	34.06	81	24	08	34.80	66	39	11	17.59	51
10	03	56.93	80	25	08	50.66	65	40	11	22.20	50
11	04	19.50	79	26	09	05.88	64	41	11	25.99	49
12	04	41.76	78	27	09	20.43	63	42	11	28.93	48
13	05	03.67	77	28	09	34.30	62	43	11	31.04	47
14	05	25.22	76	29	09	47.47	61	44	11	32.30	46
15	05	46.36	75	30	09	59.92	60	45	11	32.73	45

本文正是利用式(11)算出表1中不同扁率 e 值所对应的 γ 值,并列在该表的 γ 值一栏。

取 $e = 298.256^{-1}$, 由公式(4)可知 $\beta = 0.99330559$, 再代入(11)式, 可得 $\gamma = 11.54544$ 。取此 β 和 γ 值, 可得地心纬度 ϕ 与地理纬度 α 的换算公式为:

$$\operatorname{tg} \phi = 0.99330559 \operatorname{tg} \alpha \quad (12)$$

$$\text{和} \quad \phi = \alpha - 11.54544 \sin 2\alpha \quad (13)$$

本文建议采用(12)和(13)式进行纬度换算, 以代替已经沿用25年之久的公式(1)和(2)。无疑, 这对于一些要求纬度换算精度较高的问题是十分有益的。同时, 为了便于地学工作者进行纬度换算, 本文还根据公式(13)编制出表2。该表与目前沿用的表^[8]最大可差5角秒("), 相当于地面150米。为使该表紧凑, 表2利用 $\alpha - \phi$ 在 $\alpha_1 = 0 - 45^\circ$ 和 $\alpha_2 = 90^\circ - 54^\circ$ 的对称性, 于同一个 $\alpha - \phi$ 值的两侧分别列出相应的 α_1 和 α_2 值。

四、讨 论

公式(10)是公式(3)的一个近似公式。这个近似公式也可以通过(3)式的级数展开求得^[5]:

$$\phi = \alpha - \gamma \sin 2\alpha + \frac{\gamma^2}{2} \sin 4\alpha - \frac{\gamma^6}{3} \sin 6\alpha + \dots \quad (14)$$

因此略去 $(\gamma^2/2) \sin 4\alpha$ 及其以后各项后, 即为近似公式(10)。近似公式与精确公式之差可写成:

$$\delta = \phi - (\alpha - \gamma \sin 2\alpha) = \frac{\gamma^2}{2} \sin 4\alpha - \frac{\gamma^6}{3} \sin 6\alpha + \dots \quad (15)$$

其中 γ 由公式(4)、(9)决定。取

$$\gamma = \gamma_0 \cdot \frac{180 \times 60}{\pi} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \gamma_0 &= \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{1 - (1 - e)^2}{1 + (1 - e)^2} = e \left(\frac{2 - e}{2 - 2e + e^2} \right) \\ &= e \left(1 + \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{4}e^4 - \dots \right) \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \gamma \sim \gamma_0 \sim e \quad (17)$$

因此由(15)式给出的近似公式误差 δ 正比于 e^2 , 即

$$\delta \sim \gamma^2 \sim e^2 \quad (18)$$

如果取 γ_0 展开式中的前两项, 则公式(10)可以写成更简洁形式:

$$\phi = \alpha - e \left(1 + \frac{e}{2} \right) \cdot \frac{180 \times 60}{\pi} \cdot \sin 2\alpha \quad (19)$$

仍取 $e = 298.256^{-1}$, 则上式变成

$$\phi = \alpha - 11.54548 \sin 2\alpha \quad (20)$$

所得(20)式与(13)式相比, 其系数仅在第五位小数处有偏差, 可以保证足够的精度。

近似公式虽不如精确公式精度高, 但可直接得到地理纬度与地心纬度的差值 $\alpha - \phi$ (角秒), 尤其是进行小量计算, 即使使用仅可给出两位数值的计算尺, 也能得到满意的结

果。因此，近似公式仍不失其实用价值。

(本文1984年8月15日收到)

参 考 文 献

- [1] B. 古登堡, 地球内部物理学, 王子昌译, 科学出版社, 1965.
- [2] C. F. Richter, *Elementary Seismology*, 1958.
- [3] 中国科学院地球物理研究所, 地震学基础, 科学出版社, 1979.
- [4] P. 德林格尔海洋重力学, 詹贤均等译, 海洋出版社, 1981.
- [5] 武汉测绘学院大地测量教研组编, 大地测量学, 测绘出版社, 1960.
- [6] 方俊, 重力测量与地球形状学, 科学出版社, 1975.

ON THE CONVERSION BETWEEN THE GEOCENTRIC LATITUDE AND THE GEOGRAPHIC LATITUDE

Zhang Shaoquan

(*Institute of Geophysics, State Seismological Bureau, Beijing China*)

abstract

The approximated formula of conversion between the geocentric latitude and the geographic latitude from a basic formula is presented in this paper. And using the recent value of the ellipticity of the Earth (satellite orbit determination method, 1977), we have given the conversion coefficients (β and γ) and a new $\alpha-\phi$ list. There is some difference about 5 angle seconds (corresponding to the distance on the surface of the Earth about 150 meters). It is not neglected for some aspects of GEONOMY to require higher precision of the latitude conversion. Finally, there is a brief discussion on some approximated formulas in this papaper.