

考虑梁体—挡块碰撞效应的桥梁地震响应数值计算

刘 鹏^{1,2}, 郑凯锋¹, 杨 雷¹, 吴臻旺¹

(1. 西南交通大学土木工程学院, 四川 成都 610031;

2. 四川建筑职业技术学院, 四川 德阳 618000)

摘 要:地震中桥梁梁体和挡块之间的碰撞是导致挡块破坏的直接因素。为定量研究由碰撞带来的横桥向地震响应的变化,采用 Kelvin 接触单元模型和 SSH 法数值计算方法,推导了考虑梁体—挡块碰撞效应的桥梁地震响应的数值计算方法和步骤,并用 MATLAB 编制了相应程序。通过对比计算结果和有关文献的试验数据可以看到,本文提出的计算方法计算效率高,结果准确。最后通过一个例子说明了本方法的实用性。

关键词: 桥梁; 地震响应; Kelvin 模型; 梁体; 挡块; 碰撞效应

中图分类号: TU311.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-0844(2011)04-0336-06

Numerical Method for Bridge Seismic Response Considering Beam—Shear Key Pounding Effect

LIU Peng^{1,2}, ZHENG Kai-feng¹, YANG Lei¹, WU Zhen-wang¹

(1. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

2. Sichuan College of Architecture Technology, Sichuan Deyang 618000, China)

Abstract: The beam—shear key pounding effect is the direct factor to cause shear key of a bridge damage. In order to quantitatively analyze the change of bridge transverse seismic response caused by collision, the Kelvin contact element model and the SSH numerical calculation method are used to derive the numerical calculation method and procedure for bridge transverse seismic response considering the beam—shear key pounding effect. And MATLAB language is used to develop the computer program. According to the comparison of calculational result and test result obtained by reference, it shows that the proposed method is computationally efficient and accurate. A example is given to introduce the practicability of the proposed method.

Key words: Bridge; Seismic response; Kelvin model; Beam; Shear key; Pounding effects

0 引言

桥梁震害几乎伴随着每次大地震而发生。混凝土桥梁最常见的破坏形式包括桥墩弯曲破坏、桥墩剪切破坏、落梁破坏和支座损伤。横向抗震挡块作为使用最广泛的横向防落梁措施,它与梁体之间的碰撞以及碰撞所引起的横桥向地震响应的改变研究却不是很充分。

加利福尼亚大学圣地亚哥分校 2002 年、2007 年分别出了一份关于桥台挡块作为牺牲构件的受力

及破坏情况的研究报告^[1-2],实验研究了采用不同设计方法时挡块的破坏形式。Shervin Maleki P. E.^[3]把带挡块的简支梁桥简化成一个弹簧—质量模型,把桥的自振周期、挡块刚度、初始间隙作为参数进行了分析。Goel 和 Chopra^[4]对跨越地震带的桥梁挡块的作用进行了分析,研究了三种情形:没有挡块、线弹性挡块和非线性挡块。他认为挡块的存在改变了受力,有挡块和无挡块时,桥台和桥墩的变位和受力情况是不一样的,忽略挡块的作用未必是安全的。

国内抗震设计规范把挡块作为构造措施,不参与受力分析,对挡块的形式、尺寸均未有明确规定,相关研究也不是很深入。汶川特大地震造成了大量挡块的破坏,李乔^[5]、王东升^[6]等深入灾区现场调查,获得了许多宝贵的第一手资料,在进一步研究该问题时具有重要参考价值。

1 梁体—挡块碰撞数值计算方法选择

动力分析数值方法很多,虽然没有一个万能的方法,但是一个有竞争力的方法通常有以下几点属性^[7]:(1)应用于线性问题时是无条件稳定的;(2)每个求解步求解隐式方程不超过一组;(3)二阶精度;(4)高频范围有可控的数值阻尼;(5)自启动。其中数值阻尼是为了减小由于高频空间不可分辨的激励引起的干扰和非物理振荡^[8],这一点对求解碰撞问题是非常重要的。Houbolt 法^[9]是比较早的一种包含数值阻尼的方法,但是这种方法不仅对高频分量有耗散,对低频分量也有一定的耗散,而且该方法需要其他程序进行启动,使用较少。在 Houbolt 法基础上发展起来的单步 Houbolt(SSH)法解决了自启动的问题,但是选择不同的参数对计算结果有很大的影响,J. T. Chung^[10]基于渐进耗散和二阶精度给出了这些参数的建议取值。本文就选取 SSH 法来推导梁体—挡块碰撞问题的数值计算方法。

2 梁体—挡块碰撞模型

Kelvin 模型由一个弹簧单元和一个阻尼器单元组成。弹簧用来表示碰撞体的接触,阻尼器则用来描述碰撞中的能量损失。如果已知弹簧刚度(k_k)和阻尼系数(c_k),那么可以通过下式来计算碰撞力:

$$F_c = k_k(u_1 - u_2 - g_p) + c_k(\dot{u}_1 - \dot{u}_2); \quad u_1 - u_2 - g_p \geq 0 \quad (1a)$$

$$F_c = 0; \quad u_1 - u_2 - g_p < 0 \quad (1b)$$

式中, k_k 为刚度参数, c_k 为阻尼系数, $\dot{u}_1 - \dot{u}_2$ 为贯穿速度。

Kelvin 模型由于其阻尼项的原因,在碰撞结束时会出现负的碰撞力,使得分离的两碰撞体再次接触。为了避免出现这种现象,对该模型进行一个微调,即在碰撞力由正变负的时刻,移除弹簧和阻尼器,认为两碰撞体分离,这时会在碰撞区域残留少量的塑性变形^[11]。这样,碰撞力的计算式可以写为

$$F_c(t + \Delta t) = C_k \dot{u}_{t+\Delta t} + K_k u_{t+\Delta t} - k_k g_p l, F_c(t) > 0 \quad (2a)$$

$$F_c(t + \Delta t) = 0, F_c(t) \leq 0 \quad (2b)$$

改进后,Kelvin 模型碰撞力—相对压入量关系由如图 1(a)所示的形式,变为图 1(b)所示的形式。最后就得到了采用 Kelvin 模型的接触单元法计算梁体—挡块碰撞的计算模型,如图 2 所示。

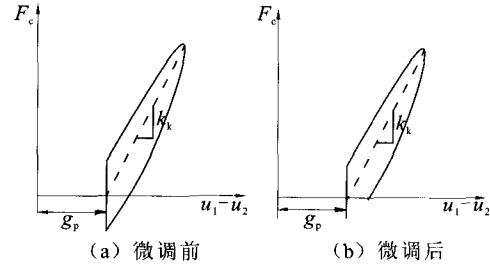


图 1 Kelvin 模型碰撞力—相对压入量关系

Fig. 1 Relationship between the impact force and pressure amount in Kelvin model.

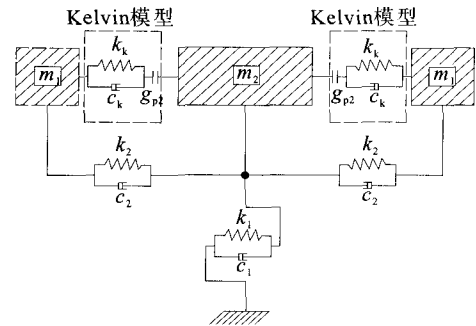


图 2 简化碰撞模型

Fig. 2 Simplified impact model.

3 梁体—挡块碰撞数值算法

考虑梁体—挡块碰撞的接触动力方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{F}_c^D + \mathbf{F}_c^E = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_g \quad (3)$$

式中, $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\mathbf{u} = [1, 1]^T$; $\mathbf{F}_c^D = \mathbf{C}_k \dot{\mathbf{u}}$, $\mathbf{F}_c^E = \mathbf{K}_k \mathbf{u} - k_k g_p l$, 分别是 Kelvin 模型中由阻尼器和弹簧产生的接触力部分。其中, $\mathbf{C}_k = c_k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_k = k_k$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $l = [1, -1]^T$ 。 c_k 和 k_k 则分别为 Kelvin 模型的阻尼系数和刚度参数。

不考虑碰撞时,对于最一般的 SSH 方法,采用如下平衡方程:

$$a_{m1}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + a_{c1}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + a_{k1}\mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} + a_{m1}\ddot{\mathbf{u}}_t + a_{c1}\dot{\mathbf{u}}_t + a_{k1}\mathbf{K}\mathbf{u}_t = -a_{f1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_g(t + \Delta t) + a_{f1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \quad (4)$$

位移和速度采用如下的表达式:

$$u_{t+\Delta t} = u_1 + \Delta t \dot{u}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_t + \beta_1 \Delta t^2 \ddot{u}_{t+\Delta t},$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \gamma \Delta t \ddot{u}_t + \gamma_1 \Delta t \ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (5)$$

式中: a_{m1} 、 a_m 、 a_{c1} 、 a_c 、 a_{k1} 、 a_k 、 a_{f1} 、 a_f 、 β_{m1} 、 β_m 、 γ_{m1} 、 γ_m 都为参数。

由式(5)中的位移表达式可以得到

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_1 \Delta t^2} (u_{t+\Delta t} - u_t) - \frac{1}{\beta_1 \Delta t} \dot{u}_t - \frac{\beta}{\beta_1} \ddot{u}_t \quad (6)$$

把式(6)代入式(5)中的速度表达式得

$$\begin{aligned} \dot{u}_{t+\Delta t} = & \frac{\gamma_1}{\beta_1 \Delta t} (u_{t+\Delta t} - u_t) + \left(1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1}\right) \dot{u}_t + \\ & \left(\gamma - \frac{\beta \gamma_1}{\beta_1}\right) \Delta t \ddot{u}_t \end{aligned} \quad (7)$$

把式(6)、式(7)代入式(4),得到

$$\bar{K} u_{t+\Delta t} = \bar{P} \quad (8)$$

其中: $\bar{K} = a_{k1} \mathbf{K} + \frac{a_{m1}}{\beta_1 \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{a_{c1} \gamma_1}{\beta_1 \Delta t} \mathbf{C}$,

$$\bar{P} = -a_{f1} \mathbf{M} \ddot{u}_g(t + \Delta t) - a_f \mathbf{M} \ddot{u}_g(t) +$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left[\frac{a_{m1}}{\beta_1 \Delta t^2} u_t + \frac{a_{m1}}{\beta_1 \Delta t} \dot{u}_t + \left(\frac{a_{m1} \beta}{\beta_1} - a_m \right) \ddot{u}_t \right] + \\ & \mathbf{C} \left[-\frac{a_{c1} \gamma}{\beta_1 \Delta t} u_t - a_{c1} \left(1 - \frac{\gamma_1}{\beta_1} \right) \dot{u}_t - (a_c - a_{c1} \gamma + \right. \\ & \left. \frac{a_{c1} \beta \gamma_1}{\beta_1}) \Delta t \ddot{u}_t \right] - a_k \mathbf{K} u_t. \end{aligned}$$

根据 J. T. Chung^[10] 的建议,各参数取值如下:

$$\begin{aligned} a_{m1} = 1, a_m = -1/2, \gamma = -1/2, \gamma_1 = 3/2, \beta = \gamma = \\ -1/2, \beta_1 = \gamma + \gamma_1 = 1, a_c = -\frac{2\beta + \beta_1}{4\beta_1^2} = 0, a_{c1} = \\ \frac{2\beta + 3\beta_1}{4\beta_1^2} = \frac{1}{2}, a_k = 0, a_{k1} = \frac{1}{2\beta_1} = \frac{1}{2}, a_{f1} = a_{k1} = \frac{1}{2}, a_f = \\ = a_k = 0. \end{aligned}$$

把以上参数代入 $\bar{K}$ 和 $\bar{P}$ 的表达式后简化为

$$\bar{K} = \frac{1}{2} \mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{4\Delta t} \mathbf{C},$$

$$\begin{aligned} \bar{P} = & -\frac{1}{2} \mathbf{M} \ddot{u}_g(t + \Delta t) + \mathbf{M} \left(\frac{1}{\Delta t^2} u_t + \frac{1}{\Delta t} \dot{u}_t \right) + \\ & \mathbf{C} \left(\frac{3}{4\Delta t} u_t + \frac{1}{4} \dot{u}_t - \frac{\Delta t}{8} \ddot{u}_t \right) \end{aligned} \quad (9)$$

计算出 $u_{t+\Delta t}$ 后, $\dot{u}_{t+\Delta t}$ 也可计算出来:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{3}{2\Delta t} (u_{t+\Delta t} - u_t) - \frac{1}{2} \dot{u}_t + \frac{\Delta t}{4} \ddot{u}_t \quad (10)$$

当考虑碰撞时,式(4)的左边加入的碰撞力项,平衡方程如下:

$$\begin{aligned} a_{m1} \mathbf{M} \ddot{u}_{t+\Delta t} + a_{c1} \mathbf{C} \dot{u}_{t+\Delta t} + a_{k1} \mathbf{K} u_{t+\Delta t} + a_m \mathbf{M} \ddot{u}_t + \\ a_c \mathbf{C} \dot{u}_t + a_k \mathbf{K} u_t + a_{F_{c1}} F_c(t + \Delta t) + a_{F_c} F_c(t) = \\ -a_{f1} \mathbf{M} \ddot{u}_g(t + \Delta t) + a_f \mathbf{M} \ddot{u}_g(t) \end{aligned} \quad (11)$$

各参数取值和不考虑碰撞力时相同,并且令

$$a_{F_{c1}} = a_{k1} = 1/2, a_{F_c} = a_k = 0, 有$$

$$\bar{K} = a_0 \mathbf{K} + a_1 \mathbf{M} + a_2 \mathbf{C} \quad \text{不碰撞,或}$$

$$\bar{K} = a_0 (\mathbf{K} + \mathbf{K}_k) + a_1 \mathbf{M} + a_2 (\mathbf{C} + \mathbf{C}_k) \quad \text{碰撞时} \quad (12)$$

$$\bar{P} = \begin{cases} = \frac{1}{2} \mathbf{M} \ddot{u}_g(t + \Delta t) + \mathbf{M} (a_1 u_t + a_3 \dot{u}_t) + \\ \quad \mathbf{C} (a_2 u_t + a_4 \dot{u}_t + a_5 \ddot{u}_t) & \text{不碰撞} \\ = -\frac{1}{2} \mathbf{M} \ddot{u}_g(t + \Delta t) \pm \frac{1}{2} k_k g_v l + \mathbf{M} (a_1 u_t + a_3 \dot{u}_t) + \\ \quad (\mathbf{C} + \mathbf{C}_k) (a_2 u_t + a_4 \dot{u}_t + a_5 \ddot{u}_t) & \text{碰撞时} \end{cases} \quad (13)$$

计算出 $u_{t+\Delta t}$ 后, $\ddot{u}_{t+\Delta t}$ 、 $\dot{u}_{t+\Delta t}$ 也可计算出来:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{t+\Delta t} = & a_1 (u_{t+\Delta t} - u_t) - a_2 \dot{u}_t + a_0 \ddot{u}_t, \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = & \dot{u}_t + a_6 \ddot{u}_t + a_7 \ddot{u}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{\Delta t^2}, a_2 = \frac{3}{4\Delta t}, a_3 = \frac{1}{\Delta t}, a_4 = \\ \frac{1}{4}, a_5 = -\frac{\Delta t}{8}, a_6 = 4a_5, a_7 = 2a_2. \end{aligned}$$

4 碰撞数值算法验证

由于缺少梁体和横向抗震挡块碰撞的相关试验资料,而用两座塔来模拟临联或相邻建筑等相邻结构碰撞的试验比较多,本文从侧面来验证程序的正确性,即通过对上面得到的梁体—挡块碰撞数值计算方法稍加修改,去掉梁体和挡块之间橡胶支座的相互作用,则可用于计算该类碰撞问题。

4.1 钢—钢碰撞试验

Chau^[12] 在香港理工大学 3 m × 3 m 的振动台上做了两个钢塔的碰撞试验。其做法是建立两个相邻钢架,钢架尺寸不同,钢架顶部各焊接一块钢板,并在左塔的钢板上焊接直径 50 mm 的钢球,接触体初始间隙为 11 mm。左右两座钢塔的动力特性分别为: $m_1 = 204.0 \text{ kg}$, $f_1 = 2.31 \text{ Hz}$, $\zeta_1 = 0.014$; $m_2 = 146.5 \text{ kg}$, $f_2 = 2.90 \text{ Hz}$, $\zeta_2 = 0.016$ 。在 1940 年 El Centro 波 SE 分量作用下,通过振动台试验得到了塔 1 的速度时程曲线,如图 3(a) 所示。作者也给出了数值计算结果,如图 3(b) 所示。

用修改后的本文计算程序得到的速度时程和碰撞力时程分别如图 4(a)、(b) 所示。可以看到,计算结果对于速度时程的预测与试验记录在某些时间点存在一些偏差,但总体趋势上来说还是比较一致,数值计算的 44 次碰撞次数也比试验记录到的 48 次少了 8.3%。

4.2 混凝土—混凝土碰撞试验

Jankowski^[13] 在波兰哥但斯克工业大学也做了相类似的碰撞试验,用来研究不同材料的结构碰撞下的反应。左右两座钢塔的动力特性分别为: $m_1 =$

10.004 kg, $f_1 = 2.59$ Hz, $\zeta_1 = 0.004$; $m_2 = 19.226$ kg, $f_2 = 2.99$ Hz, $\zeta_2 = 0.01$ 。分别对钢、混凝土、木材和陶瓷等四种材料做成的碰撞体进行了振动台试验,地震波同样采用 1940 年 El Centro 加速度时程。对每种材料在不同初始间隙时两座钢塔的反应

进行了研究,并给出了初始间隙为 40 mm 时两塔的位移时程,其中混凝土材料的位移时程如图 5 所示,其中,(a)为碰撞时的位移时程,(b)为自由振动时的位移时程。从图 5 可以很清楚地看到,碰撞明显改变了结构的地震反应。

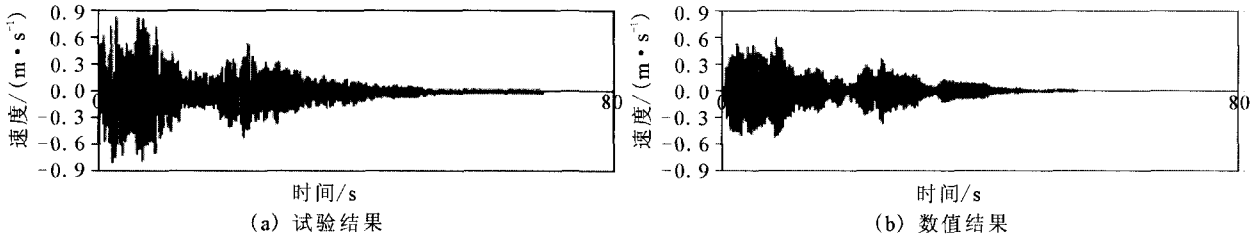


图 3 塔 1 速度时程试验和数值结果
Fig. 3 Velocity test and calculation results of Tower 1.

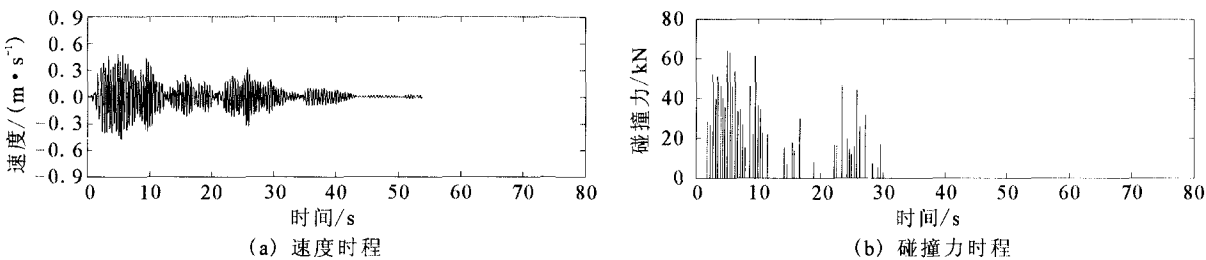


图 4 数值计算塔 1 速度时程和碰撞力时程
Fig. 4 Velocity and impact force calculation results of Tower 1.

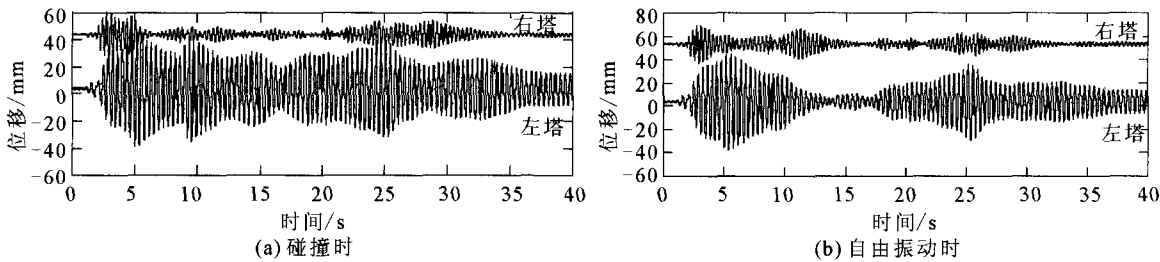


图 5 混凝土—混凝土实测位移时程
Fig. 5 Displacement test results of concrete—concrete impact.

与上面钢—钢碰撞一样,用修改后的本文计算程序可以得到混凝土—混凝土碰撞时的位移时程,如图 6(a)所示;同时计算得到两塔不发生碰撞时的

位移时程,如图 6(b)所示。通过对比计算结果和试验结果可以发现,二者吻合的很好,说明了本文所编制的计算程序是准确的、可行的。

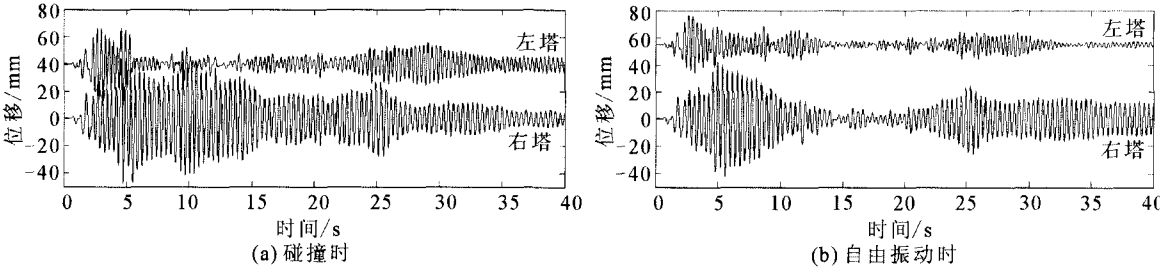


图 6 混凝土—混凝土数值计算位移时程
Fig. 6 Displacement calculation results of concrete—concrete impact.

5 应用举例

某桥梁体、盖梁、桥墩和挡块横桥向布置如图7所示。梁体用C50混凝土,其余用C40混凝土。支座采用板式橡胶支座,型号为 $\Phi 600 \times 90$ mm,每个盖梁横桥向布置2个。桥墩侧向刚度 $k_1 = 3.287 \times 10^7$ N/m。通常在进行包含盖梁的桥墩的基频计算时,下部结构质量选取盖梁的质量加上桥墩质量的一半,即有 $m_1 = 33\ 205$ kg。梁体部分取一跨主梁的质量,即有 $m_2 = 190\ 000$ kg。计算得到 Hertz 接触刚度为 2.2818×10^{10} N/m^{3/2}, Kelvin 接触刚度采用文献[14]提出的等效 Kelvin 模型刚度。初始间隙 $g_p = 0.05$ cm。

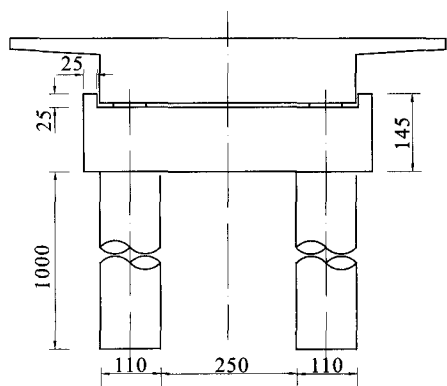


图7 示例桥梁结构示意图(单位: cm)

Fig. 7 Example bridge schematic plan (unit: cm).

板式橡胶支座的试验结果表明,滞回曲线呈狭长形,可以近似作线性处理^[15]。本文中支座对于梁体的横向约束采用线弹簧来模拟。板式橡胶支座等效剪切刚度 $K = GA / \sum t$ 。其中, G 为支座剪切模量,取1.0 MPa, A 为支座的剪切面积, $\sum t$ 为橡胶片的总厚度。本例中 $\sum t = 0.065$ m。所以, $K = 4.348 \times 10^6$ N/m。那么,支座侧向刚度 $k_2 = 8.696 \times 10^6$ N/m。选用两条地震波,分别为宁河天津南北向波(以下简称天津波)和北京旅馆测点南北向波(以下简称北京波),峰值统一调整到0.3 g,持时各截取8 s。对两条波进行插值,步长为0.000 2 s。计算结果分别如图8、图9所示。从碰撞前后的位移时程看出,碰撞明显改变了结构的地震响应。

6 结论

利用 Kelvin 接触单元模型和 SSH 法,推导了考虑梁体—挡块碰撞效应的横桥向地震响应的计算方法和步骤,并用 MATLAB 语言编制了计算程序,通过混凝土—混凝土和钢—钢碰撞试验验证了程序的准确性,为进一步研究横桥向的碰撞和桥墩的设

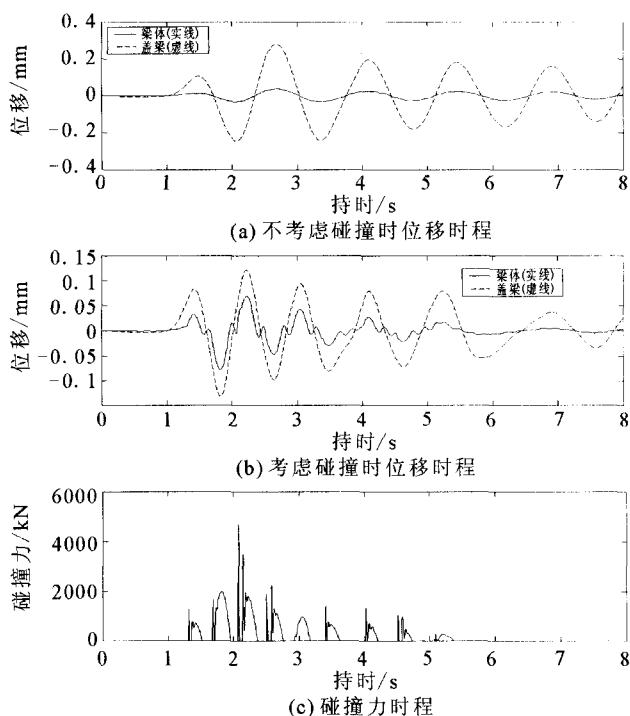


图8 天津波计算结果

Fig. 8 Calculation results under Tianjin seismic wave.

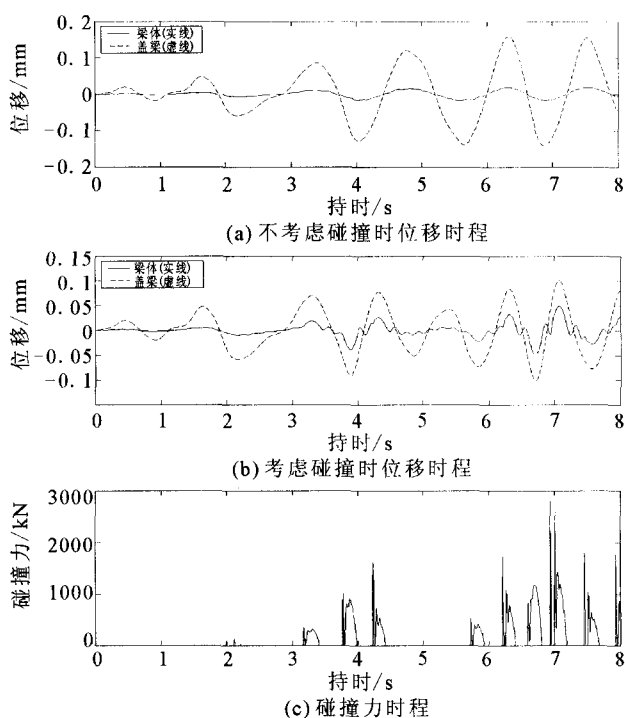


图9 北京波计算结果

Fig. 9 Calculation results under Beijing seismic wave.

计等问题奠定了基础,是从定性考虑碰撞效应到定量研究的一个转变。同时从计算结果也可以看到,碰撞明显改变了结构的地震响应,这在进行下部结

构设计时需要引起注意。

[参考文献]

- [1] Sami Hanna Megally, Perdo F ilva, Frieder Seible. Seismic response of sacrificial shear keys in bridge abutments[R]. San Diego: University of California, 2001.
- [2] Azadeh Bozorgzadeh, Sami Hanna Megally, Scott Ashford, et al. Seismic response of sacrificial exterior shear keys in bridge abutments[R]. San Diego: University of California, 2007.
- [3] Shervin Maleki P E. Effect of Side Retainers on Seismic Response of Bridges with Elastomeric Bearings[J]. Journal of Bridge Engineering, 2004, 9(1): 95-100.
- [4] Rakesh K Goel, Anil K Chopra. Role of Shear Keys in Seismic Behavior of Bridges Crossing Fault—Rupture Zones[J]. Journal of Bridge Engineering, 2008, 13(4): 398-408.
- [5] 李乔, 赵世春, 等. 汶川大地震工程震害分析[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2008.
- [6] 王东升, 郭迅, 孙治国, 等. 汶川大地震公路桥梁震害初步调查[J]. 地震工程与工程振动, 2009, 6, 29(3): 84-94.
- [7] Hans M Hilber. Collocation, dissipation and 'overshoot' for time integration schemes in structural dynamics[J]. Earthquake Engng. Struct. Dyn., 1978, 6(1): 99-117.
- [8] Gregory M Hulbert, Jintai Chung. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1996, 137(2): 175-188.
- [9] Houbolt J C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft[J]. Journal of the Aeronautical Science, 1950, 17 (9): 540-550.
- [10] Jintai Chung, Gregory M Hulbert. A family of single-step Houbolt time integration algorithms for structural dynamics[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1994, 118(1): 1-11.
- [11] Petros Komodromos, Panayiotis C Polycarpou, Loizos Papaliozou, et al. Response of seismically isolated buildings considering poundings[J]. Earthquake Engng. Struct. Dyn., 2007, 36(3): 1605-1622.
- [12] K T Chau, X X Wei, X Guo, et al. Experimental and theoretical simulations of seismic poundings between two adjacent structures[J]. Earthquake Engng. Struct. Dyn., 2003, 32 (4): 537-554.
- [13] Robert Jankowski. Experimental study on earthquake—induced pounding between structural elements made of different building materials[J]. Earthquake Engng. Struct. Dyn., Published online in Wiley InterScience, Jul 14, 2009.
- [14] 岳福青. 地震作用下隔震高架桥梁的碰撞反应及控制[D]. 天津大学, 2007.
- [15] 范立础, 胡世德, 叶爱君. 大跨度桥梁抗震设计[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.