第37卷 第2期
2015年6月
地 震 工 程 学 报
CHINA EARTHQUAKE ENGINEERING JOURNAL
Vol. 37 No.2
June, 2015

含方形凹陷半无限非均匀介质波动问题 FDM 模拟①

杨在林，孙 铖，王 耀，李志东

(哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院，黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要：采用规则网格有限差分方法对二维平面弹性波动方程进行差分离散，得到相应的弹性波动方程的有限差分方程，再将弹性波动方程的差分格式与吸收边界、自由边界的离散形式结合形成弹性波动方程有限差分方程解决问题的主体，将其应用于含方形凹陷半无限非均匀介质的模型中进行数值模拟，得到此离散化模型中不同时刻不同节点的位移值。针对具体算例，运用上述方法结合科学计算软件 MATLAB 和结果后处理软件 DIFEM ISOLINE PLOTER 得到不同时刻的水平方向位移等值线图与接收器测量点处的合成位移记录，讨论非均匀介质、吸收边界、方形凹陷等对波动特性的影响。

关键词：非均匀介质；波动；有限差分方法；凹陷；Higdon 吸收边界

中图分类号：O343.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－0844(2015)02－0553－06

DOI：10.3969/j.issn.1000－0844.2015.02.0553

FDM Simulation of Wave Motion in a Semi-infinite Inhomogeneous Medium with a Rectangular Depression

YANG Zai-lin, SUN Cheng, WANG Yao, LI Zhi-dong

(*College of Aerospace and Civil Engineering*, *Harbin Engineering University*, *Harbin*, *Heilongjiang* 150001, *China*)

Abstract: Using the finite difference method, the two-dimensional elastic wave equation is processed to obtain the finite difference equation. Then, the differential elastic wave equation format is combined with the absorbing boundary and the discrete form of the free boundary. The elastic wave equation finite difference equation is formed to solve the problem. Using the finite difference equation, the displacement on different nodes can be obtained at different times for the rectangle-shaped depression of a semi-infinite inhomogeneous medium. Using the finite difference equation of the two-dimensional elastic wave equation combined with the scientific computation software, MATLAB, and the post-processor software, DIFEM ISOLINE PLOTER, the displacement isoline of the rectangle-shaped depression of the semi-infinite inhomogeneous medium in the x direction can be obtained for different times. The effect of the inhomogeneous media, absorbing boundary, and the rectangle-shaped depression on the wave characteristics is analyzed numerically.

Key words: inhomogeneous media; wave motion; finite difference method; depression; Higdon absorbing boundary

① **收稿日期**：2014-08-20

基金项目：2015年地震行业科研专项经费项目(201508026－02)；黑龙江省自然科学基金(A201310)；黑龙江省博士后科研启动金(LBH－Q13040)

作者简介：杨在林(1971－)，男，教授，博士生导师，主要从事弹性波动理论的相关研究.E-mail：yangzailin00@163.com

0 引言

波动在声学、电磁学、光学、地球物理学等领域有着重要的理论意义与应用价值。例如在地球物理学领域中，地震勘探（地震波勘探）是一种在石油工业领域中应用极其广泛的勘探手段，其原理是通过观测和分析地下介质密度与弹性模量的不同形成对人工激励的不同响应，然后通过数值模拟得到的数据合理地推断出岩层的岩性、构造等相关信息[1]。随着科学技术的进步，现阶段地震波数值模拟主要有三类方法：积分方程法、几何射线法、波动方程法。其中波动方程法可以通过波动方程模拟出丰富的波动信息，能更好地解释复杂地层弹性波的传播机理。因此波动方程数值模拟在地震波模拟领域具有重要价值[2]。

弹性波动问题的研究在数值方法方面已经发展出很多的解法[3-9]，其中有限差分方法是求解波动方程等双曲型偏微分方程的最常用的数值方法之一，具有运算速度快、编程简单等优点。通过推导得到弹性波动方程的有限差分格式，以及初始条件及自由边界、吸收边界的离散形式[10-12]，然后通过有限差分方程组的求解得到弹性波动问题的数值解[13-14]。

1 理论推导

1.1 波动方程的有限差分离散

假设弹性波在 x-z 平面内传播，则其参数与 y 坐标无关，取正应力分量 $\sigma_x=\tau_{xx}$，$\sigma_z=\tau_{zz}$，剪应力分量为 $\varepsilon_x=\varepsilon_{xx}$，$\varepsilon_z=\varepsilon_{zz}$，剪应变分量为 ε_{xz}。

平面问题的弹性动力方程为

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x}+\tau_{xz,z}&=\rho\ddot{u}_x-f_x\\ \tau_{xz,x}+\sigma_{z,z}&=\rho\ddot{u}_z-f_z\end{aligned}\tag{1}$$

几何方程为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=u_{x,x}\\ \varepsilon_z&=u_{z,z}\\ \gamma_{x,z}&=2\varepsilon_{xz}=u_{x,z}+u_{z,x}\end{aligned}\tag{2}$$

本构方程为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{CE}\tag{3}$$

上式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=(\sigma_x,\sigma_z,\tau_{xz})^T\\ \boldsymbol{E}&=(\varepsilon_x,\varepsilon_z,\gamma_{xz})^T\end{aligned}\tag{4}$$

弹性系数矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{13} & c_{15}\\ c_{13} & c_{33} & c_{35}\\ c_{15} & c_{35} & c_{55}\end{pmatrix}\tag{5}$$

则

$$\begin{aligned}\sigma_x&=c_{11}u_{x,x}+c_{13}u_{z,z}+c_{15}(u_{x,z}+u_{z,x})\\ \sigma_z&=c_{13}u_{x,x}+c_{33}u_{z,z}+c_{35}(u_{x,z}+u_{z,x})\\ \tau_{xz}&=c_{15}u_{x,x}+c_{35}u_{z,z}+c_{55}(u_{x,z}+u_{z,x})\end{aligned}\tag{6}$$

将式(6)代入式(1)并展开得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_x}{\partial x}(c_{11,x}+c_{15,z})+\frac{\partial u_z}{\partial z}(c_{13,x}+c_{35,z})+\\ &(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x})(c_{15,x}+c_{55,z})+c_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\\ &2c_{15}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+c_{55}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+c_{15}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\\ &(c_{13}+c_{55})\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+c_{35}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\rho\ddot{u}_x-f_x\\ &\frac{\partial u_x}{\partial x}(c_{15,x}+c_{13,z})+\frac{\partial u_z}{\partial z}(c_{35,x}+c_{33,z})+\\ &(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x})(c_{55,x}+c_{35,z})+c_{15}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\\ &2c_{35}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+c_{35}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+c_{55}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\\ &(c_{35}+c_{55})\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}=\rho\ddot{u}_z-f_z\end{aligned}\tag{7}$$

基于规则网格的八节点显式差分格式(图 1)。

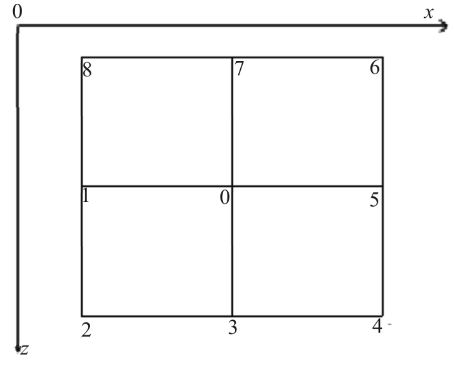


图 1 八节点规则网格示意图

Fig.1 Diagram of regular grid with eight-node

令 x 方向上位移为 μ，z 方向上位移为 ω，可以得到弹性波动方程的有限差分格式：

$$\begin{aligned}\mu_0^{n+1}&=\frac{\Delta t^2}{\rho}L_\mu(\mu_0^n,\omega_0^n)+2\mu_0^n-\mu_0^{n-1}+\frac{\Delta t^2}{\rho}f_x\\ \omega_0^{n+1}&=\frac{\Delta t^2}{\rho}L_\omega(\mu_0^n,\omega_0^n)+2\omega_0^n-\omega_0^{n-1}+\frac{\Delta t^2}{\rho}f_z\end{aligned}\tag{8}$$

式(8)中

$$L_{\mu}(\mu_0^n,\omega_0^n)=c_{11}(\frac{\mu_5^n+\mu_1^n-2\mu_0^n}{\Delta x^2})+$$
$$c_{55}(\frac{\mu_3^n+\mu_7^n-2\mu_0^n}{\Delta z^2}+\frac{\omega_4^n+\omega_8^n-\omega_6^n-\omega_2^n}{4\Delta x\Delta z})+$$
$$c_{13}(\frac{\omega_4^n+\omega_8^n-\omega_6^n-\omega_2^n}{4\Delta x\Delta z})+$$
$$c_{15}(\frac{\mu_4^n+\mu_8^n-\mu_6^n-\mu_2^n}{2\Delta x\Delta z}+\frac{\omega_5^n+\omega_1^n-2\omega_0^n}{\Delta x^2})+$$
$$c_{35}(\frac{\omega_3^n+\omega_7^n-2\omega_0^n}{\Delta z^2})+(c_{11,x}+c_{15,z})(\frac{\mu_5^n-\mu_1^n}{2\Delta x})+$$
$$(c_{13,x}+c_{35,z})(\frac{\omega_3^n-\omega_7^n}{2\Delta z})+$$
$$(c_{15,x}+c_{55,z})(\frac{\mu_3^n-\mu_7^n}{2\Delta z}+\frac{\omega_5^n-\omega_1^n}{2\Delta x})$$
$$L_{\omega}(\mu_0^n,\omega_0^n)=c_{33}(\frac{\omega_3^n+\omega_7^n-2\omega_0^n}{\Delta z^2})+$$
$$c_{55}(\frac{\mu_4^n+\mu_8^n-\mu_6^n-\mu_2^n}{4\Delta x\Delta z}+\frac{\omega_5^n+\omega_1^n-2\omega_0^n}{\Delta x^2})+$$
$$c_{13}(\frac{\mu_4^n+\mu_8^n-\mu_6^n-\mu_2^n}{4\Delta x\Delta z})+c_{15}(\frac{\mu_5^n+\mu_1^n-2\mu_0^n}{\Delta x^2})+$$
$$c_{35}(\frac{\mu_3^n+\mu_7^n-2\mu_0^n}{\Delta z^2}+\frac{\omega_4^n+\omega_8^n-\omega_6^n-\omega_2^n}{2\Delta x\Delta z})+$$
$$(c_{15,x}+c_{13,z})(\frac{\mu_5^n-\mu_1^n}{2\Delta x})+(c_{35,x}+c_{33,z})(\frac{\omega_3^n-\omega_7^n}{2\Delta z})$$
$$+(c_{55,x}+c_{35,z})(\frac{\mu_3^n-\mu_7^n}{2\Delta z}+\frac{\omega_5^n-\omega_1^n}{2\Delta x})\tag{9}$$

式(8)是二阶精度的三层显示差分格式,$t=\Delta t(n=1)$ 时刻将产生虚拟位移 μ_0^{-1},为了消除虚拟位移,引入二阶精度的二阶差分格式计算此时刻位移 μ_0^{-1},设初始条件为 g_0^0:

$$\frac{\mu_0^1-\mu_0^{-1}}{2\Delta t}=g_0^0\tag{10}$$

将式(10)与式(8)联立,消去 μ_0^{-1} 可得到初始条件的离散格式:

$$\mu_0^1=\frac{\Delta t^2}{2\rho}L_{\mu}(\mu_0^0,\omega_0^0)+\mu_0^0+\Delta t g_x^0+\frac{\Delta t^2}{2\rho}f_x\tag{11}$$

同理可以求得离散初始条件 ω_0^1

$$\omega_0^1=\frac{\Delta t^2}{2\rho}L_{\omega}(\mu_0^0,\omega_0^0)+\omega_0^0+\Delta t g_z^0+\frac{\Delta t^2}{2\rho}f_z\tag{12}$$

将上面推导出的差分公式和初始-边值离散条件结合,可逐层推算出整个求解域的位移波场值,进而能够进一步得到拥有复杂界面的非均匀各向异性介质弹性波场。

出平面波动方程形式为

$$\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}-f_y=\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\tag{13}$$

可得到出平面波的格式:

$$u_y(i,j,n+1)=2u_y(i,j,n)-u_y(i,j,n-1)+\frac{\Delta t^2}{\rho}f_y+$$
$$\frac{G\Delta t^2}{\rho}(\frac{u_y(i,j+1,n)+u_y(i,j-1,n)-2u_y(i,j,n)}{\Delta z^2}+$$
$$\frac{u_y(i+1,j,n)+u_y(i-1,j,n)-2u_y(i,j,n)}{\Delta x^2}\tag{14}$$

式中 $u_y(i,j,n)$ 表示 $t=n$ 时刻的坐标 $x=i,z=j$ 处的节点位移。通过与初始-边值条件联立,可以求得各个时刻各个节点的出平面波的波幅。

1.2　自由边界和吸收边界

以水平方向上的自由边界为例,为了求解自由边界上的相关位移,可以在自由边界上面再附加一层虚拟的边界点,通过相关式子用已知参数代替虚拟点的参数,再带入弹性波动方程有限差分方程中,从而求得自由边界上的相关参数。由自由边界上具有垂直于自由边界的应力为零这一特性,可知:

$$\begin{aligned}\sigma_z&=c_{13}\varepsilon_x+c_{33}\varepsilon_z=0\\\tau_{xz}&=c_{55}\gamma_{xz}=0\end{aligned}\tag{15}$$

通过中心差分方法,将应力方程离散化,得到离散方程:

$$\begin{aligned}\sigma_z&=c_{13}(\frac{\mu_5-\mu_1}{2\Delta x})+c_{33}\left(\frac{\omega_3-\omega_7}{2\Delta z}\right)=0\\\tau_{xz}&=c_{55}\left(\frac{\omega_5-\omega_1}{2\Delta x}\right)-c_{55}\left(\frac{\mu_3-\mu_7}{2\Delta z}\right)=0\end{aligned}\tag{16}$$

对于水平的自由边界,7 点的相关位移可以用其他点代替。同理,8、6 点的位移也可以表示出来,三点的差分格式为:

$$u_x(i,j-1)=\frac{\Delta z}{\Delta x}[u_z(i+1,j)-u_z(i-1,j)]+u_x(i,j+1)$$
$$u_z(i,j-1)=\frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{\Delta z}{\Delta x}[u_x(i+1,j)-u_x(i-1,j)]+u_z(i,j+1)$$
$$u_x(i-1,j-1)=\frac{\Delta z}{\Delta x}[u_z(i,j)-u_z(i-2,j)]+u_x(i-1,j+1)$$
$$u_z(i-1,j-1)=\frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{\Delta z}{\Delta x}[u_x(i,j)-u_x(i-2,j)]+u_z(i-1,j+1)$$
$$u_x(i+1,j-1)=\frac{\Delta z}{\Delta x}[u_z(i+2,j)-$$

$$u_z(i,j)] + u_x(i+1,j+1)$$

$$u_z(i+1,j-1) = \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{\Delta z}{\Delta x}[u_x(i+2,j) - u_x(i,j)] + u_z(i+1,j+1) \quad (17)$$

吸收边界采用 Higdon 人工吸收边界条件,其二阶吸收边界差分算子为:

$$\hat{B}(E_x, E_t^{-1}) = \prod_{i=1}^{2} \left\{ \beta_i \left(\frac{1 - E_t^{-1}}{\Delta x} \right) [(1-\alpha)I + \alpha E_x] - c\left(\frac{E_x - I}{\Delta x} \right) [(1-b)I + bE_t^{-1}] \right\} \quad (18)$$

对其进行差分离散、归纳,可以得到吸收边界上的波场值表达式。弹性波动方程有限差分方程、自由边界、吸收边界与初始-边值条件结合,从而能够对问题进行求解。

2 稳定性分析

基于二维均匀介质中的显式格式的谱分析方法得到稳定性条件,可以表示为:

$$\upsilon_P \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} < 1 \quad (19)$$

式中 υ_P 表示纵波波速;Δx、Δz 分别表示 x、z 方向上的空间步长。由式(19)可知,稳定性条件与横波波速无关。通过数学方法可将此关系推广到非均匀质的规则网格差分格式中,其更一般形式为:

$$\Delta t \sqrt{\frac{\tilde{c}_{max}}{\rho_{min}}} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} < 1 \quad (20)$$

式中 ρ_{min} 是非均匀介质的最小密度值;$\tilde{c}_{max}$ 是 c_{11} 和 c_{33} 中的最大值。

3 算例分析与讨论

3.1 模型的建立

设模型尺寸 1 500 m×500 m,震源位于(490 m,190 m)处,震源函数为

$$f(t) = -2\xi(1-2\xi T^2)e^{-\xi T^2} \quad (21)$$

式中,F_0 表示脉冲中心频率,大小为 20 Hz;$T=2.5t-t_s$($t_s=1.5/F_0$)为时移参数;$\xi=F_0^2/0.151\ 2$ 表示脉冲宽度。在(845 m,55 m),(1 145 m,55 m),(1 445 m,55 m)处设立观测点。研究对象的材质为石英岩,取泊松比变化范围为 0.08~0.25,拉压弹性模量变化范围为 60~200 GPa,质量密度变化范围为 2 640~2 710 kg/m^3,设研究对象的相关系数是竖向线性变化的,有限差分离散模型如图 2 所示,相关系数设置如表 1 所示。

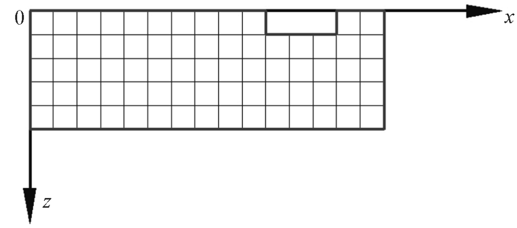


图 2 模型网格划分示意图

Fig.2 Mesh of the model

表 1 模型规则网格差分与非均匀介质相关系数

Table 1 Coefficients of mesh and inhomogeneous medium

参数名称	参数值
时间步长/s	0.000 1
介质密度/(kg·m^{-3})	2640+z×7/50
拉压弹性模量/GPa	60+7×z/25
泊松比	0.08
x 方向空间步长/m	5.0
z 方向空间步长/m	5.0
计算步数	2 600

3.2 波场位移的等值线图

由不同时刻的水平方向位移等值线图(图 3)可以发现,波传播到方形凹陷时将发生反射与散射。在非均匀介质中波在不同位置的传播速度不同,因此在震源上下方向呈现出不对称性;同时介质的弹性系数矩阵和密度不同,在距震源相同距离的上下位置处位移响应值也不同;波在吸收边界处的吸收效果较理想,说明二阶 Higdon 吸收边界适用于非均匀介质波动问题的求解。

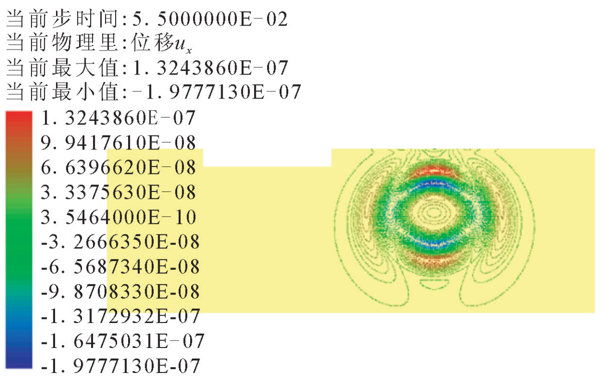
3.3 接收器测量点处的合成位移记录

通过接收器记录的数据(图 4)可以发现,以 x 方向位移为例,波在具有方形凹陷的介质里传播时,方形凹陷能对凹陷后方波的幅值产生一定的削弱作用。这说明在建筑物的选址过程中,需要考虑周边凹陷地形(例如沟壑、湖泊等)对建筑物抗震性能的影响。

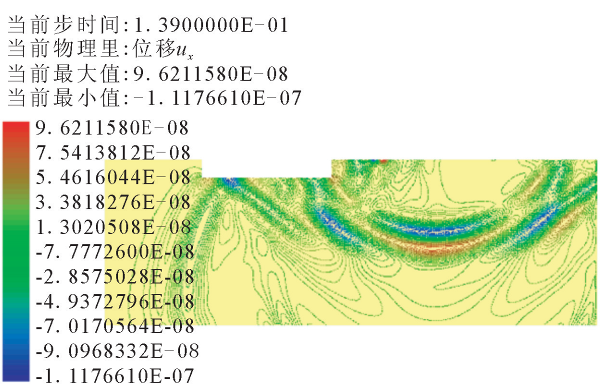
4 结论

本文是基于弹性波动理论,通过有限差分数值方法将弹性波动方程离散化得到相应的有限差分计算格式,结合初始-边值条件,求得各点在各个时刻的波场位移值,通过对计算结果进行分析,可以得到以下结论:

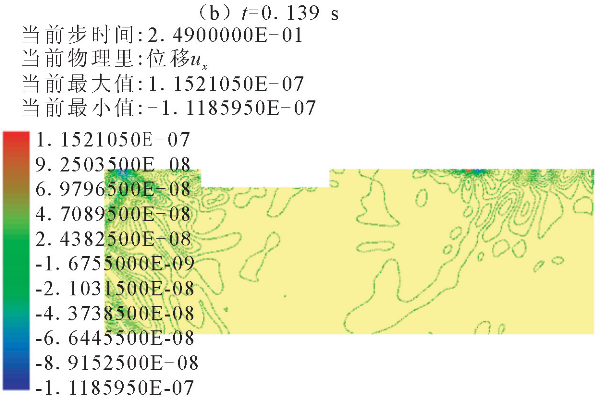
(1) 通过观察波在吸收边界处的吸收效果,发现在适当的条件参数下,二阶 Higdon 吸收边界在非均匀介质波动问题的求解方面具有较好的效果,说明该人工边界能够适用于非均匀介质波动问题。



(a) t=0.055 s



(b) t=0.139 s

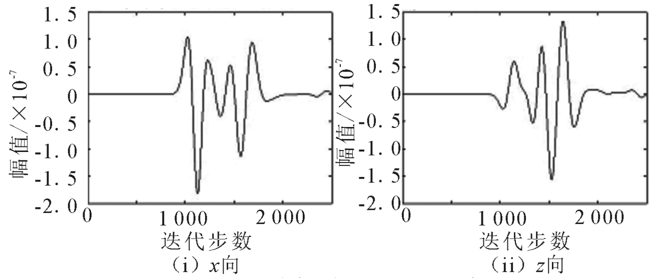


(c) t=0.249 s

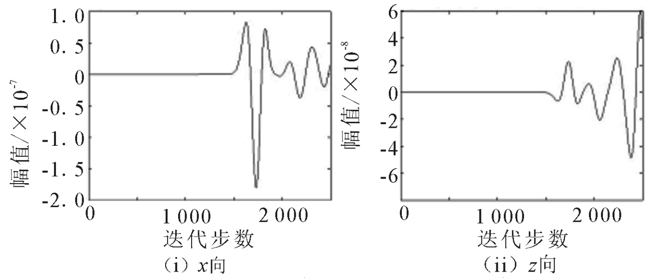
图 3　水平方向位移等值线图

Fig.3　Displacement contour map in horizontal direction

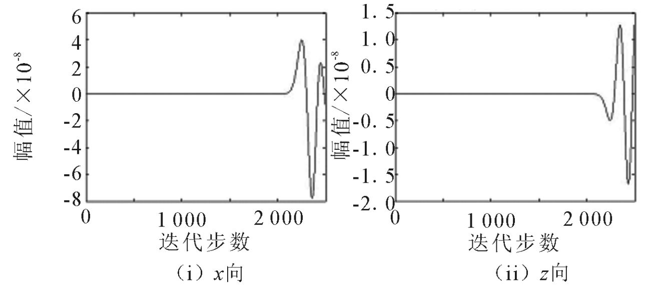
（2）波在具有方形凹陷的介质里传播时，方形凹陷能对凹陷后方波的强度产生一定的削弱作用。这对优化建筑选址、提高建筑物抗震能力具有一定的参考价值。



(a)　(845 m，55 m)



(b)　(1 145 m，55 m)



(c)　(1 445 m，55 m)

图 4　不同观测点处接收器 x、z 方向位移记录

Fig.4　Displacement records in x and z direction at different points

参考文献(References)

[1]　孙卫涛.弹性波动方程的有限差分数值方法[M].北京：清华大学出版社，2009.
SUN Wei-tao.Finite Element Method of Equations for Elastic Waves[M].Beijing：Tsinghua University Press，2009.(in Chinese)

[2]　裴正林，牟永光.地震波传播数值模拟[J].地球物理学进展，2004，19(4)：933-941.
PEI Zheng-lin，MU Yong-guang.Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation[J].Progress in Geophysics，2004，19(4)：933-941.(in Chinese)

[3]　Alterman Z，Karal F C JR.Propagation of Elastic Waves in Layered Media by Finite Difference Methods[J].Bulletin of the Seismological Society of America，1968，58(1)：367-398.

[4]　Akik K，Richards P G.Quantitative Seismology[M].New York：W H Freeman and Company，1980.

[5]　Smith W D.The Application of Finite-element Analysis to Body Wave Propagation Problem[J].Geophysics J Roy Astr Soc，1975，42：747-768.

[6]　Cerveny V，Molotkov I A，Psencik I.Ray Method in Seismology[M]. Praha：Univ Karlova1977.

[7]　李信富，李小凡，张美根.地震波数值模拟方法研究综述[J].防灾减灾工程学报，2007，27(2)：241-248.
LI Xin-fu，LI Xiao-fan，ZHANG Mei-gen.Review of Seismic Wave Numerical Modeling Methods[J].Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering，2007，27(2)：241-248.(in Chinese)

[8]　DUAN Yu-ting，HU Tian-yue，YAO Feng-chang，et al. 3D

Elastic Wave Equation Forward Modeling Based on the Precise Integration Method[J].Applied Geophysics,2013:71-78,118-119.

[9] 廖振鹏.工程波动理论导论(第二版)[M].北京:科学出版社,2002.
LIAO Zhen-peng. Introduction to Engineering Wave Theory (the Second Edition)[M].Beijing:Science Press,2002.(in Chinese)

[10] Higdon R L. Absorbing Boundary Conditions for Difference Approximations to The Multidimensional Wave Equation[J]. Math Comp,1986,47(176):437-459.

[11] Higdon R L. Numerical Absorbing Boundary Conditions for the Wave Equation[J].Math Comp,1987,49(179):65-90.

[12] 任济时.高阶 Higdon 吸收边界条件的直接算法及其评估[J].电子学报,1997,25(5):110-112.
REN Ji-shi. A Directly Implemented Method and Evaluation for the Higher Order Higdon Absorbing Boundary Condition [J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(5): 110-112. (in Chinese)

[13] 孙卫涛,杨慧珠,舒继武.非均匀介质弹性波动方程的不规则网格有限差分方法[J].计算力学学报,2004,21(2):135-142.
SUN Wei-tao, YANG Hui-zhu, SHU Ji-wu. Finite Difference Method of Lrregular Grid for Elastic Wave Equation in Heterogeneous Media[J].Chinese Journal of Computational Mechanics,2004,21(2):135-142.(in Chinese)

[14] 唐文,王尚旭,袁三一. 起伏地表二阶弹性波方程差分策略稳定性分析[J].石油物探,2013,52(5):457-463,441.
TANG Wen, WANG Shang-xu, YUAN San-yi.Stability Analysis of Differential Strategy for Rugged Topography by Second-order Elastic Wave Equation Based on Coordinate Transformation[J]. Geophysical Prospecting for Petroleum, 2013, 52(5):457-463,441. (in Chinese)