第8卷 第2期 西北地震学报 Vol.8, No.2
1986年6月 NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL June, 1986

岩石膨胀三维本构关系的应用

林邦慧 王新华 梅世蓉* 胡小幸
（国家地震局地球物理研究所）

摘 要

本文运用文献〔1〕中提出的岩石膨胀的三维本构关系及带有弹性—膨胀矩阵的三维非线性有限元程序，对几个实例进行试算，计算结果表明，该方法及程序可以近似描述岩石的膨胀，可用于研究和模拟包含断层等地震孕育问题。

一、引 言

关于岩石膨胀效应的实验研究的结果表明，当对岩石加载达到宏观破裂强度的$\frac{1}{2}$—$\frac{2}{3}$时，膨胀开始发生。这种非线性体积膨胀几乎是所有结晶岩石的普遍特点[2—4]。

在研究和模拟地震时发现，在断层端部附近及闭锁段周围有可能造成应力的高度集中。当应力集中到一定程度时，发生膨胀。膨胀一旦发生，就使本构关系表现出严重的非线性，从而对断层端部或闭锁段等处的应力应变分布、应力强度因子以及断层扩展、地震发生等都会有影响。因此考虑岩石膨胀的非线性本构关系，对研究带有断层介质的地震孕育问题极为重要。

文献〔1〕依据实验结果和参考Nur提出的二维膨胀本构关系[5]，提出在三维情况下一般的岩石膨胀的本构关系，並将其推导成增量形式的有限元矩阵表达式，编制了全部的非对称全带宽存储的三维非线性有限元程序。本文运用这个程序，计算了几个实例，检验程序及方法。

二、岩石三维膨胀本构关系简介

1975年A·Nur给出了二维问题膨胀本构关系[5]，把由实验得出的体应变θ与剪切应力τ的关系近似地表示为幂函数的形式：

$$\theta = 3h\tau^{n} \qquad (1)$$

並通过一定的假设，给出了二维膨胀本构关系。文献〔1〕通过做以下假定，将岩石膨胀二

* 国家地震局分析预报中心

维本构关系推广到三维情况。

1）假设在应力空间存在一簇曲面，只有当应力点到达开始膨胀的曲面上时膨胀才发生，这个曲面的位置与破裂强度有关，而破裂强度又与岩石的种类和围压等有关。这簇曲面应当是应力不变量的函数

$$f(I_1,\ I_2^S,\ I_3^S)=C \qquad (2)$$

（2）式中S表示应力偏量，由于膨胀的发生仅由差应力引起，因而f中不含I_1，故：

$$f(I_2^S,\ I_3^S)=C \qquad (3)$$

当应力点在某一曲面上移动时（$df=0$），膨胀量不变；当$df>0$时，膨胀量增加；当$df<0$时，膨胀量减少。

2）假设总的应变张量增量可为线弹性部分和膨胀部分（非线性弹性）之和，即

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^e+d\varepsilon_{ij}^d \qquad (4)$$

（4）式中e表示弹性，d表示膨胀。式中弹性部分满足Hooke定律。

3）假设总的应变的主轴方向与应力σ_{ij}的主轴方向一致。

这样，为了满足第一项假定条件对膨胀应变增量的符号规定，可取：

$$d\varepsilon_{ij}^d=G_{ij}df$$

$G_{ij}\neq 0$，为满足第三项假定条件，取

$$G_{ij}=h\frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

所以 $$d\varepsilon_{ij}^d=h\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}df \qquad (5)$$

（5）式是一般的膨胀本构关系的增量形式。h、g、c可由实验或理论计算选取。围压对膨胀的限制作用用h来表示。

我们取

$$f=(I_2^S)^{n/2}$$

$$g=\sigma_{ii}=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

简化研究膨胀应变为球张量形式的情况，由上式代入（5）式可得：

$$d\varepsilon_{ij}^d=h\delta_{ij}d(I_2^S)^{n/2} \qquad (6)$$

其全量形式：

$$\varepsilon_{ij}^d=h\delta_{ij}(I_2^S)^{n/2} \qquad (7)$$

对某种岩石，如果可以从大量的实验，特别是真三轴实验资料中归纳出函数f和g的形式，则在计算程序中只要将函数过程f、g换成相应形式，其计算结果在某种程度上可描述该种岩石的膨胀。

由（7）式得出膨胀矩阵：

$$\{\varepsilon^d\}=h\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}(I_2^S)^{n/2} \qquad (8)$$

在岩石膨胀的初始状态下，将（8）式用Taylor法展开，並略去高次项有

$$\{\varepsilon^d\}=\{\varepsilon_0^d\}+h[S]\{\Delta\sigma\} \tag{9}$$

其中［S］称为膨胀矩阵，具有明显的非对称形式：

$$[S]=\begin{pmatrix} \frac{\partial(I_2^S)^{n/2}}{\partial\sigma_x} & \frac{\partial(I_2^S)^{n/2}}{\partial\sigma_y} \cdots & \frac{\partial(I_2^S)^{n/2}}{\partial\tau_{xz}} \\ '' & '' & '' \\ '' & '' & '' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

由（9）式：

$$\{\Delta\varepsilon^d\}=\{\varepsilon^d\}-\{\varepsilon_0^d\}=h[S]\{\Delta\sigma\} \tag{11}$$

由Hooke定律和（11）式得：

$$\{\Delta\varepsilon\}=([D]^{-1}+h[S])\{\Delta\sigma\} \tag{12}$$

对（12）式求逆，可得Taylor展开在一级近似情况下的增量形式的膨胀应力—应变关系：

$$\begin{aligned}\{\Delta\sigma\}&=([D]^{-1}+h[S])^{-1}\{\Delta\varepsilon\}\\&=[D_{ed}]\{\Delta\varepsilon\}\end{aligned} \tag{13}$$

式中［D_{ed}］称为弹性—膨胀矩阵。

使用有限元法分析问题时，当应力的值达到可使岩石膨胀的状态时，可以将载荷分成若干份，逐次加载，每次加载要保证Taylor展开式近似成立，並将弹性矩阵代之以弹性—膨胀矩阵。可用积分形成刚度矩阵。

三、岩石膨胀的三维非线性有限元程序简介

我们自编了带有上述弹性—膨胀矩阵的三维非线性有限元程序，简称N—D程序。

程序中除了安排纯弹性问题的求解外，还考虑了岩石的膨胀。由于岩石膨胀矩阵具有明显的非对称形式，因此本文对刚度迭加采用非对称全带宽存储，並用列主元素法直接求解非对称带状方程组[6]。

如前所述，在小应变下膨胀是不发生的，当应力点达到曲面f（I_2^S，I_3^S）=C_0时，膨胀才开始发生。当应力点超出这个曲面时，本构关系将偏离线性。因此在实际计算中，只有当应力状态达到一定水平时（即膨胀发生时）才使用这种膨胀非线性本构关系。这种状态往往在某一特定地区才可能存在。该区在发生膨胀之前及大多数地区岩石的本构关系是线弹性的。

为了模拟实际断层的情况，考虑到断层的蠕滑，我们从弹塑性岩石介质的本构方程出发，运用岩石摩擦一般遵从的Byerlee定律，建立了弹塑性断层介质的非线性本构关系，在此基础上设计了一种空间非线性断层单元。这个单元具有这种介质的性质，而且在几何形状上在某个方向可以很薄，从而使得对断层活动的模拟在物理性质及几何尺度上与真实断层更为接近[7]。

四、几个计算实例

先用N—D程序对两个简单模型进行试算。这两个模型均选用同一个正方体八点单元（见图1），边长均为2公里。对一个模型用弹性矩阵进行处理，另一个用弹性—膨胀矩阵进行处理。

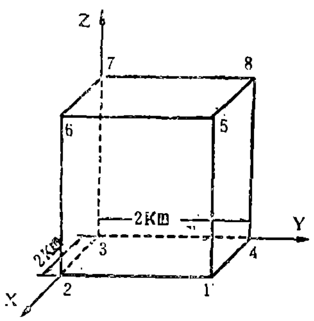

图1　简单均匀模型

Fig. 1　The model used in calculation

在模型中作用在节点1—8的荷载是由剪应力τ_{xz}（$\tau_{xz}=200$巴）来实现的。六面体底面的四个节点除全都在Z方向约束外，节点2在X方向，节点4在Y方向也约束。现将用N—D程序分别计算得到的两组结果，包括各节点的位移及应变列于表1、表2中（弹性解用角标E表示，弹性—膨胀解用角标ED表示）。

由表1可知，两模型各相应节点位移之差的数值等于常数(受约束点位移差为0)，即对每个节点位移分量从弹性—膨胀解中扣除相应的弹性解后数值均相等，说明发生了一定数量的均匀膨胀。表2的结果也直接说明这一点，弹性解各节点的ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}接近零，$\gamma_{xz}=0.826\times10^{-3}$；而弹性—膨胀解的$\varepsilon_x$、$\varepsilon_y$、$\varepsilon_z$不为零，均为$0.215\times10^{-3}$，比$\gamma_{xz}$（$0.826\times10^{-3}$）略小。两组结果各节点的应力除$\tau_{xz}=200$巴外，其他应力分量均为零（在误差范围内），这个结果即是模型授予上述集中力的应力解。

为了了解和比较微裂膨胀（n＝2）、节理膨胀(n＝1)和砂粒膨胀（n＝½），我们对上述模型在同样条件下，将膨胀指数n分别取2、1、½，用N—D程序做有限元分析。计算结果表明：膨胀是各向同性的，$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z$。当n不同时，膨胀量不同；当n增加时，

表1　　两个模型的节点位移

节点号 \ 位移	U			V			W		
	U^E	U^{ED}	$U^{ED}-U^E$	V^E	V^{ED}	$V^{ED}-V^E$	W^E	W^{ED}	$W^{ED}-W^E$
1	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}	～0	～0	～0
2	～0	～0	0	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}	～0	～0	～0
3	～0	～0	0	～0	～0	0	～0	～0	～0
4	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}	～0	～0	0	～0	～0	～0
5	0.165×10^{-2}	0.208×10^{-2}	0.43×10^{-3}	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}
6	0.165×10^{-2}	0.165×10^{-2}	0	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}
7	0.165×10^{-2}	0.165×10^{-2}	0	～0	～0	0	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}
8	0.165×10^{-2}	0.208×10^{-2}	0.43×10^{-3}	～0	～0	0	～0	0.4298×10^{-3}	0.4298×10^{-3}

膨胀量也增加，与文献〔 5 〕的结果一致。以上实例表示了均匀的岩石在均匀的剪切应力下产生了各向同性的膨胀。应变是膨胀应变与弹性应变的迭加。

表 2　　两模型的节点应变

	ε_x		ε_y		ε_Z		γ_{xy}		γ_{yz}		γ_{xZ}	
	ε_X^E	ε_X^{ED}	ε_y^E	ε_y^{ED}	ε_z^E	ε_Z^{ED}	γ_{xy}^E	$-\gamma_{xy}^{ED}$	γ_{yz}^E	γ_{yz}^{ED}	γ_{xz}^E	γ_{xZ}^{ED}
1	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}
2	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.829×10^{-8}
3	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}
4	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}
5	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}
6	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}
7	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}
8	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	0.215×10^{-8}	～0	～0	～0	～0	0.826×10^{-8}	0.826×10^{-8}

为了了解断层周围的岩石膨胀对垂直形变的影响，我们对带有两个空间断层单元的模型（图 1 ），在纯剪切外力（$\tau_{xy}=1.879$千巴）作用下分别用N—D程序求弹性解 和弹性—膨胀解。

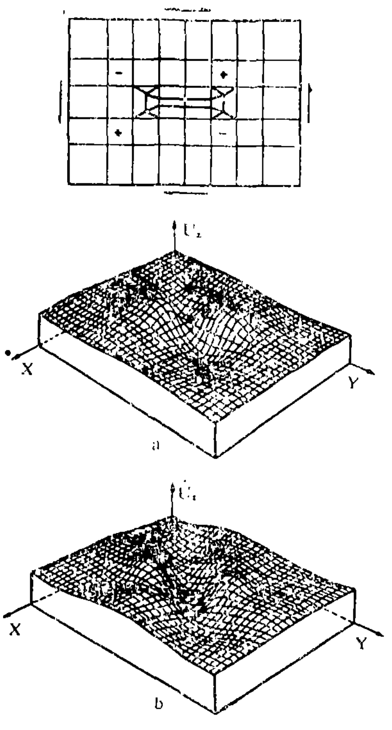

图 2　带有断层单元的模型在纯剪切外力作用下的弹性解的垂直位移（a）和弹性—膨胀解的垂直位移（b）

Fig. 2　The vertical displacement of elastic solution for the model with fault elements under the pure shear force(a), and the vertical displacement of the solution of elastic dilatancy

弹性解各节点的垂直方向位移表现出四象限反对称分布（图 2 ）。随着边界加载应力的增加，当应力满足膨胀条件时，岩石发生体积膨胀。由于膨胀量的量级大于弹性解的量级，弹性—膨胀解各节点的垂直位移出现隆起状分布（图 2 b ）。

1976年 7 月28日唐山7.8级地震前，震中区的各水准点的测值从1967年到1969明显上升，几年间各点平均上升17.7毫米，年上升速率达8.8毫米，远远大于前20年的年速率（0.2毫米

/年）[8][9]。图3为1969年相对1959年的垂直形变图[8]。由图可知，上述隆起中心在丰南与宁河之间，最大隆起幅度为40毫米。我们用上述带有弹性—膨胀矩阵的三维非线性有限元程序，对上述地面隆起进行数字模拟研究。

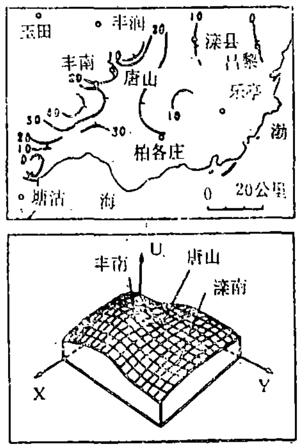

图3　唐山地区1959—1969年垂直形变图

Fig. 3 The vertical deformation during 1959—1969 in Tangshan region

唐山震区周围有四条大断层包围，形成唐山菱形断块。震前在断块内并不存在大断裂带，只有规模不大的唐山断层，网格图包括以上几条断层(见图4)。用空间断层单元模拟这些断层，断层介质的扬氏模量是周围介质的$^2/_3$，剪切模量G取0.5×10^5，泊松比取0.25。震区介质膨胀系数h取0.6×10^{-6}，膨胀指数n取2（即裂隙膨胀），剪切强度取1100巴。根据华北地区强震震源机制解的结果，把作用在本区边界上的主应力σ_2、σ_3近似看成是水平的并随深度线性变化。在深度20公里处σ_1为5000巴，σ_3为3000巴，σ_2是垂直的。图5是用N—D程序计算出的震区地表各点的垂直形变的立体图。由图5可知，其形态与图3显示的图象基本相近。说明在唐山震区岩石介质的膨胀可以形成形如图3所示的地面隆起。

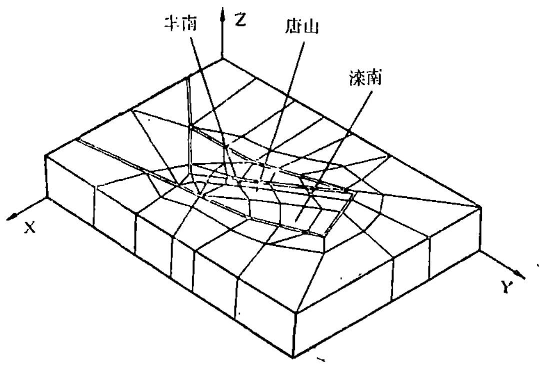

图4　唐山震区有限单元网格图

Fig. 4 The grid chart of the finite elements in Tangshan seismic area

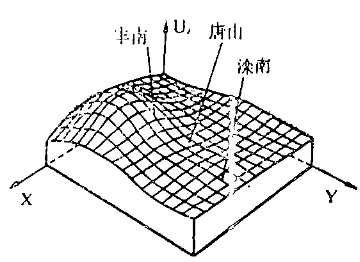

图5　用带有弹性—膨胀矩阵的三维非线性有限元程序计算得出的震区地表各点的垂直形变立体图

Fig. 5 The stereofigure of vertical deformation at each spot on surface in Tangshan seismic area

五、几 点 讨 论

1.以上计算结果表明，上述岩石膨胀三维本构关系和程序，可以近似描述岩石的膨胀，及用于研究和模拟包含断层等地震孕育问题的研究。

2.在具体计算中选用的f形式，对于真实岩石介质显得比较简单，但在目前状况下，对具体问题作定量计算的定性分析时，作为岩石膨胀的近似描述还是可行的。

3.到目前为止，关于真三轴各向异性膨胀应变的实验结果还很少，对于这种膨胀现象，只要根据总结的规律适当选取g的形式，便可进行描述。

（本文1985年12月10日收到）

参 考 文 献

〔1〕林邦慧、王新华、梅世蓉、胡小幸，岩石膨胀的三维本构关系和1976年唐山地震前垂直形变的有限元模拟，待发表.

〔2〕W.F.Brace, Dilatancy in the fracture of cryntallin rocks, Journal of Geophysical Research, Vol.71, №16, 3939—3953, 1966.

〔3〕C.H.Scholz & R. Kranz, Notes on dilatancy recovery, J.G.R., Vol. 19, 2132, 1974.

〔4〕G.C.Sih, Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, Int.T.Fraot., Vol.10, №3, 1974.

〔5〕A.Nur, A note on the constitutive law for dilatancy, Pure and Applied Geophysics, Vol.113, №1/2, 197—206, 1975.

〔6〕冯康，计算方法，国防工业出版社，1976.

〔7〕王新华、林邦慧、梅世蓉，弹塑性断层的理论分析及其应用，待发表.

〔8〕张祖胜、谢觉民、徐峰壮、彭苏昆，唐山7.8级地震的地壳垂直形变，地球物理学报，Vol.24, №2, 1981.

〔9〕国家地震局《一九七六年唐山地震》编辑组，一九七六年唐山地震，地震出版社，1982.

THE APPLICATION OF THREE DIMENSIONAL CONSTITUTIVE RELATIONSHIP OF ROCK DILATANCY

Lin Banghue Wang Xinghua Mei Shirong[1)] HuiXaoxing
(*Institute of Geophysics, State Seismological Bureau*)

Abstract

Some examples related to the real case were calculated by using the 3-dimensional constitutive relationship of rock dilatancy, and the non-linear finite element program for 3-dimension with elastic-dilatantive matrix, presented in (1).

The results show that this method can approximately describ the dilatancy of rock, and can be used to study and simulate the problems involving earthquake faults and the seismogenesis.

1)Center of Analysis and Prediction, State Seismological Bureau.