

多重网格方法在资料同化中的应用

郑祚芳

沈桐立

(中国气象局北京城市气象研究所, 北京 100089) (南京气象学院, 南京 210044)

摘要 多重网格方法通过在疏密不同的网格层上进行迭代, 以平滑不同频率的误差分量。具有收敛速度快、精度高等优点, 是现有计算工作量最少的算法之一。文章介绍了多重网格方法的原理和具体实现方案, 将其用于卫星云图资料的变分同化中, 并与超松弛迭代法作了比较。结果表明采用多重网格法, 有助于提高同化效率。

关键词 多重网格方法 加速迭代 变分同化

引言

资料同化在数值预报中的重要性正受到越来越多的关注, 引入分辨率较高的卫星探测资料来弥补常规观测网的不足, 已成为当前提高数值预报准确率的一个重要途径。目前资料同化多采用变分方法, 这就需要解一类椭圆型方程。传统的数值求解过程首先要将问题离散化, 然后采用迭代法来求解, 通常在离散化和求解过程中无相互作用^[1], 其收敛速度往往较慢, 影响到模式的预报时效。

多重网格方法根据方程连续解与离散解之间的误差估计, 不断调整迭代格距以达到既满足精度要求, 又节约计算工作量的目的。其基本思想最早由 Fedorenko^[1]于 1962 年在用迭代法解椭圆差分问题时提出, 并就规则区域上的 Poisson 方程研究了该方法的收敛性。之后经 Brandt、Fulton 等人^[2,3]的共同努力, 证明了它的 h (网格层) 无关收敛性以及其计算量是与离散未知量成正比的, 从而确认了多重网格法是一个渐进最优算法。目前, 多重网格思想在国际上开始为广大科技工作者接受, 它和有限差分法及有限元法相结合, 已成为求解线性和非线性偏微分方程非常有效的方法。国内对于多重网格方法的研究较少, 刘卓等^[4]曾将其用于加速自适应网格的生成, 取得了较好的效果。

本文介绍用于求解非线性方程的多重网格迭代法, 将其用于卫星云图资料的变分同化中, 以提高同

化效率, 延长模式预报时效。

1 多重网格法的原理和实现方案

1.1 多重网格法的基本思想

研究表明, 迭代法的收敛速率与计算的网格距有关, 在一个均匀的、各向同性的固定网格上, 应用带有标准 5 点有限差分星形松弛方案, 每次迭代能使误差的高频分量减小到原来的 25%, 然而其低频分量则减弱得非常缓慢^[5]。事实上, 任何在单层网格中进行的迭代法, 除了开头几次迭代之外, 其收敛速度都是很慢的, 而且随着迭代次数的增加会越来越慢。我们可以将差分方程的精确解与迭代几次后得到的近似解之间的差用傅立叶级数来表示, 也就是说误差可分解为许多具有不同“波长”的分量。在单层网格迭代法中, 迭代过程能有效地削减“波长”与网格距同一量级的那一部分误差分量, 对于频率更低即“波长”更长的那些分量, 由于每一步松弛迭代只涉及到计算点临近几点的数值, 迭代格距相对此误差分量的“波长”来说又过小, 因而不能有效地削减这一部分误差分量。其结果是在削减了“波长”与网格间距同量级的误差分量之后, 收敛速度就变得越来越慢。

如果在求解过程中, 用一系列逐步加密或减疏的网格去离散求解区域, 在不同疏密的网格层上用迭代法求解, 以平滑不同频率的误差分量, 然后通过网格层间的适当联系将在所有各重网格上消除误差分量

的效果综合起来,就可以将所有尺度范围内(从整个定义域到最小的迭代步长)的误差分量有效地减弱,这就是多重网格法的基本思想。对多重网格方法优点的一种最直观的理解是,为了在第 k 层中得到方程的解,可以先将方程离散在第 $k-1$ 层中进行松弛迭代,然后插值回到第 k 层中作为方程在 k 层中的近似解。由于在 $k-1$ 层中的迭代格点数要比第 k 层中少得多,从而节省了计算时间,同理 $k-1$ 层中的近似解可得自于 $k-2$ 层,依次类推直到 $k=1$ 层。在数学上表现为针对如下形式的椭圆型方程:

$$\nabla^2 Q - bQ = \sigma \quad (1)$$

能对其寻求形为

$$Lu = f \quad (2)$$

的解。式中 L 为对式(1)进行有限差分近似而形成的离散线性算子, u 是该问题的精确解, f 是一个随机强迫项。如果用 v 来表示 u 的近似值(初猜值), d 表示其偏差,则有

$$u = v + d \quad (3)$$

定义剩余

$$r = f - Lv \quad (4)$$

用来衡量 v 未能满足局地线性算子的程度。由式(3)求得 v 的表达式后代入式(4),并利用 L 的线性性质及式(2),可得到

$$Ld = r \quad (5)$$

可见偏差 d 满足解为 u 的同一方程,问题转化为由式(5)求解 d ,若 d 得解则可据式(3)计算出 u 。

1.2 多重网格法的实现方案

多重网格迭代法从最细网格层上的初猜值 v 开始,用松弛法进行迭代直到收敛速度变慢,这时相对于此网格距来说小尺度的误差已大多被平滑掉了,而大尺度的误差只是稍微有所减弱。为了使收敛加速,应使用较粗的网格,这时须把剩余 r 转移到下一层较粗的网格上,迭代求解式(5),当收敛速度变慢时再将剩余 r 转移到下一层更粗的网格上。这一过程将持续到将剩余转移到最粗的网格层上,然后在最粗的网格层上精确求解式(5),之后将求得的偏差 d 内插到上一层较细网格上并加到 v 上,便可得到在此网格层上一个经改进后的 u 的近似值。反复循环进行这一过程直到求得最细网格层上 u 的精确值。

在构造实用的多重网格算法时,以下分量的选择值得注意:网格剖分方案、每一网格层上的松弛方法、判断收敛速度变慢的标准、用于将细网格层上的

函数映像到粗网格层上的限制操作数,以及用于把粗网格层上的函数映射到细网格的插值操作数,目前对这些量的选择还缺乏一般的准则。

本文在实现多重网格迭代方法时采用标准倍格距网格剖分法,即每增加一个网格层时,令分辨率增加一倍,在各网格层上的松弛方案采用超松弛迭代(SOR)法。

计算每次迭代后全场各网格点上的剩余,挑出其中最大的一个,将前后两次迭代求解所得的最大剩余之比用 δ 表示,如在第 k 层网格上进行 p 次迭代后计算 δ 时的表达式为:

$$\delta = \frac{\| \max(f^k - L^k u_p^k) \|}{\| \max(f^k - L^k u_{p-1}^k) \|}$$

若 δ 大于或等于某个小于 1 的常数,则认为收敛速度变慢,本文经试验取 δ 的值为 0.8 效果较好。

关于限制操作数 I_h^H 及插值操作数 I_H^h ,采用文献[2]的研究成果:

$$I_h^H = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad I_H^h = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

依上述方案分别设计了二重、三重、四重网格迭代法。为便于比较各重网格方案与SOR方法的迭代工作量,定义多重网格法的工作量或折合迭代次数为

$W = \sum_{k=1}^M [N^k / (4^{M-k})]$, 其中 N 为第 k 层网格上的松弛次数,由于第 k 层的网格点数为最密层(M 层)的 $\frac{1}{4^{M-k}}$,因而 W 相当于将工作量都折合至最密层来计算^[5],所设计多重网格迭代法的计算流程如图1。

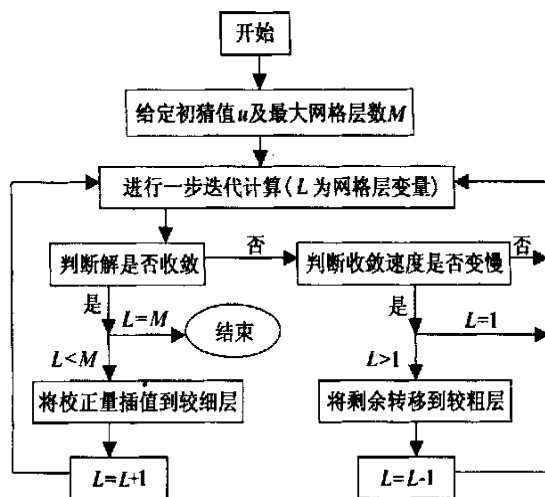


图1 多重网格法计算流程图

2 多重网格法与SOR方法在云图资料变分同化中的比较试验

2.1 卫星云图资料变分同化的基本原理

由于卫星云图反映的是各层云分布的总效果,同化时先要将其反演为模式变量(如湿度场),并进行质量控制,以剔除其中不合理的奇异点,然后将其与常规观测得到的资料场统一起来。目前同化多采用变分法,所谓变分法就是求泛函极值问题,用于资料同化,其基本原理就是使满足一组约束条件的分析场的泛函在最小二乘方的意义上达到最小。

常规观测资料虽然分辨率不高,但其值较精确;卫星反演资料具有较高的时空分辨率,空间点之间的强弱变化关系也较精确,但它的值存在系统性偏差,须进行修正。因此可针对这种特性寻找一分析场 Q ,使它的值接近常规场 Q_r 的值,梯度接近非常规场 Q_s 的梯度,于是可构建如下泛函^[6]:

$$I[Q(x, y)] = \int_x \int_y [a(Q - Q_r)^2 + r_x(\nabla_x Q - \nabla_x Q_s)^2 + r_y(\nabla_y Q - \nabla_y Q_s)^2] dx dy \quad (6)$$

其中 a, r_x, r_y 为变分系数,其极小的边界条件为 $\delta Q|_r = 0$ 及 $Q|_r = Q_r$,根据不动边界泛函极值化为欧拉方程的方法,可得式(6)的欧拉方程为:

$$a(Q - Q_r) - r_x(\nabla_x^2 Q - \nabla_x^2 Q_s) - r_y(\nabla_y^2 Q - \nabla_y^2 Q_s) = 0 \quad (7)$$

假定所考虑的场各向同性,即 $r_x = r_y = r$,并记 $\frac{a}{r} = b$ 且 $b > 0$, $\nabla^2 Q_s - \frac{a}{r} Q_r = \sigma(x, y)$,则有

$$\nabla^2 Q - bQ = \sigma \quad (8)$$

式(8)即为赫姆霍兹方程。

2.2 试验设计

取1996年7月3日00:00(UTC)由常规探空资料分析得出的700hPa相对湿度场 Q_r 以及同时刻卫星云图反演得到的相对湿度场 Q_s ,求解式(7),其迭代公式为:

$$Q_{i,j}^{(n+1)} = \frac{\omega}{a + 2r(\frac{m_{i,j}^2}{\Delta x^2} + \frac{m_{i,j}^2}{\Delta y^2})} [aQ_{ri,j} + r(\frac{m_{i,j}^2}{\Delta x^2}) \cdot (Q_{i+1,j}^{(n)} + Q_{i,j+1}^{(n)} + Q_{i-1,j}^{(n+1)} + Q_{i,j-1}^{(n+1)}) - r(\frac{m_{i,j}^2}{\Delta x^2}) (Q_{si+1,j} + Q_{si-1,j} + Q_{si,j+1} + Q_{si,j-1} - 4Q_{si,j})] + (1 - \omega) Q_{i,j}^{(n)} \quad (9)$$

式(9)中 n 为迭代步长, m 为地图放大系数(Lambert投影),试验时选取变分系数 $a = 0.1$, $r = 10^{10}$,松弛系数 $\omega = 1.2$ (本文采用PIII866机型,256M内存)。

2.3 试验结果分析

图2和图3给出了在不同计算格点条件下,所设计的多重网格迭代法与SOR迭代法在同等精度下的迭代工作量和迭代时间。从中我们能很直观地看出:

(1)在相同的误差允许条件下,多重网格方法所用迭代次数和迭代时间都明显少于SOR方法。

(2)随着迭代精度,计算格点数和迭代网格层的增加,多重网格方法收敛速度快,计算量少的优越性表现得更为明显。

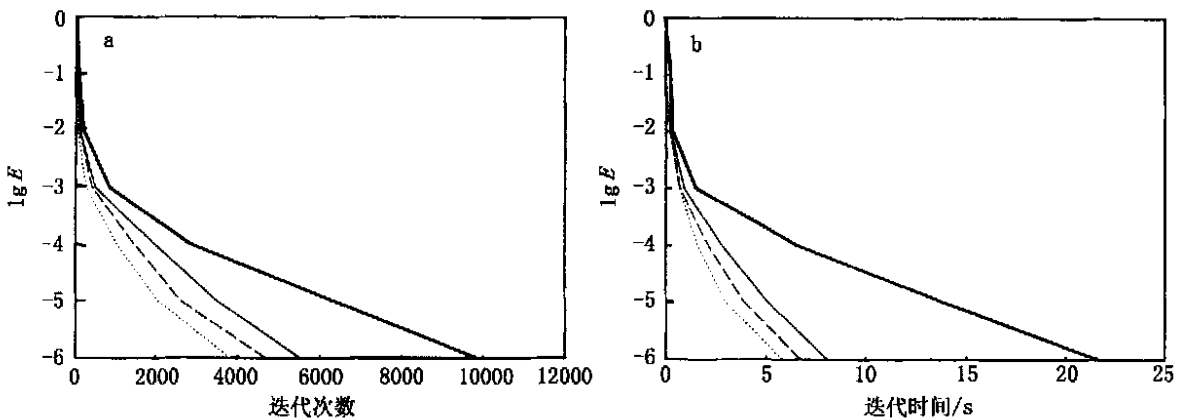


图2 多重网格法(二重:细实线,三重:虚线,四重:点线)与SOR迭代法(粗实线)比较

(E 为误差,迭代格点 49×49 ,下同)

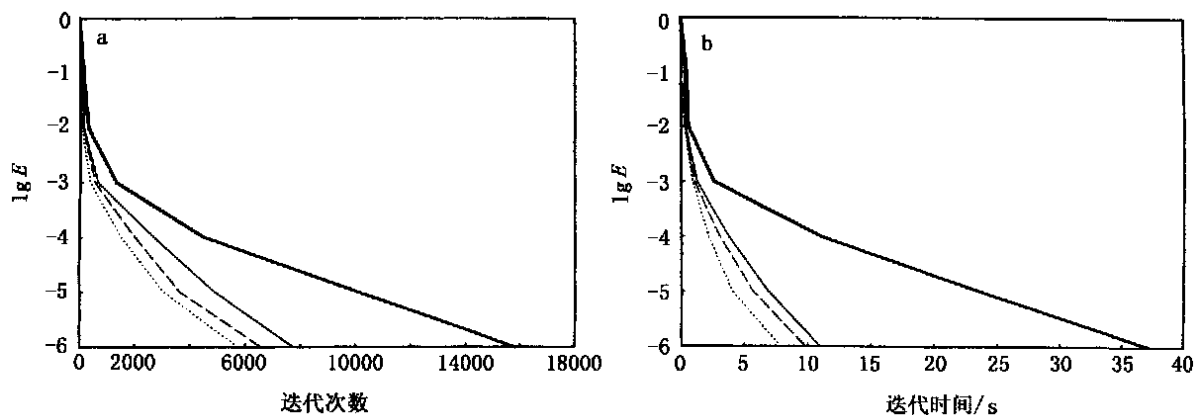


图3 多重网格法与SOR迭代法比较

(迭代格点 65×65 , 其他说明同图2)

3 结论和讨论

本文针对目前资料同化中采用传统单层网格迭代法收敛速度较慢的特点,提出用多重网格迭代方法来加速同化求解过程。介绍了多重网格方法的原理和具体实现方案,将其应用于卫星云图资料的变分同化中,并与SOR方法进行了比较试验。发现在同样的误差条件下,采用多重网格方法所耗计算量和计算时间均明显少于SOR方法,而且随着迭代精度的提高,计算格点数和迭代网格层的增加,其收敛速度快,精度高的优越性表现得更为显著。试验表明,将多重网格迭代方法引入卫星云图资料的变分同化中,有助于提高同化效率。

目前,多重网格方法的应用在国内还处于起步阶段。传统的网格剖分多采用倍格距方案,对迭代求解区域的网格点数有一定的要求,这限制了它的应用领域,因此需要探讨一种新的通用的网格剖分

方案。另外,用于网格层间数据传送的控制函数的优化,每一网格层上采用的松弛方法以及收敛标准的选择,都需要进一步研究,以更好的提高求解效率。

参考文献

- 1 Fedorenko R P. A relaxation method for solving elliptic difference equations. *U. S. S. R. Compu. Math. and Math. Phys.*, 1962, 2 (6): 1092 - 1096
- 2 Brandt A. Multilevel adaptive solution to boundary value problems. *Math. Comput.*, 1977, 31(2): 333 - 390
- 3 Fulton E, Schubert W. Multigrid methods for elliptic problems: A review. *Mon. Wea. Rev.*, 1986, 114(5): 943 - 959
- 4 刘卓, 曾庆存, 张林波, 等. 多重网格法在加速自适应网格生成中的应用. *大气科学*, 1998, 22(2): 191 - 198
- 5 康立山, 全惠云. 数值解高维偏微分方程的分裂法. 上海: 上海科学技术出版社, 1990. 216 - 230
- 6 沈桐立, 闵锦忠, 吴诚鸥, 等. 有限区域卫星云图资料变分分析的试验研究. *高原气象*, 1996, 15(1): 58 - 67

Application of Multigrid Method in Data Assimilation

Zheng Zuofang Shen Tongli

(Institute of Urban Meteorology, CMA, Beijing 100089, China)

(Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing 210044, China)

Abstract: By using different mesh densities to eliminate different frequency components of errors, the multigrid method can accelerate the convergence of iteration. It has advantages of high convergent speed and high accuracy. The multigrid method is compared with the super relaxation iteration method. Experiments show that the multigrid method performs better in improving the validity in the iteration.

Keywords: multigrid method, acceleration of iteration, variational assimilation