

GPS 定位中卫星坐标计算的切比雪夫多项式拟合法

余 鹏 孙学金 赵世军

(解放军理工大学气象学院,南京 211101)

摘要 在 GPS 定位中需要不断地计算卫星的坐标,实时的卫星坐标是根据接收到的广播星历来计算的,而每次计算卫星坐标都需要占用大量内存,影响计算速度。利用切比雪夫多项式拟合广播星历的卫星坐标,以实现卫星轨道的标准化。通过实例分析了用切比雪夫多项式进行卫星坐标拟合的精度及多项式阶数和时间间隔的合理选择等问题,得出了一些有益的结论。

关键词 GPS 广播星历 卫星坐标 切比雪夫多项式

引言

凡是利用 GPS 定位,不管何种用途、用何种接收机和何种精度要求,都必须首先计算出观测卫星的位置。因此,GPS 卫星坐标在 GPS 定位过程中,是一个必不可少的关键量。由此可见,如何快速准确地计算出所需时刻 GPS 卫星的坐标是 GPS 定位中的一个极其重要的问题。

GPS 卫星星历按照精度可分为两种:精密星历和广播星历^[1,2]。因此直接利用卫星星历进行卫星位置计算的方法也就相应地有两种。第一种是利用精密星历提供的等间隔时间点上的卫星坐标,利用插值方法计算所需时刻卫星的位置。由于精密星历只能在卫星观测的 11 天后获得,无法为实时定位、精确导航等提供有效服务。所以要实时计算卫星的位置只能利用 GPS 卫星广播星历中提供的开普勒轨道参数、轨道摄动参数等信息按照固定的公式进行卫星位置的计算^[3]。由于用广播星历参数计算卫星的位置时,每 2 h 每颗卫星有一组独立的参数,用相邻两组星历计算同一时刻的卫星位置,将会有不同的结果,所以每次计算时都要进行时间比较,利用不同时刻的广播星历参数计算,很烦琐同时还影响计算的速度,有时在不同时刻的广播星历之间还可能存在着精度不匹配的情况。因此,如果能找到一

合适的多项式对卫星坐标进行拟合,则可以克服一般计算方法的不足。这一拟合的方法称为 GPS 轨道的标准化。

1 利用切比雪夫多项式进行轨道标准化的具体方法

GPS 卫星的轨道变化是一个连续的过程。因此,将卫星星历表示为时间多项式,也就是将一定时间间隔的卫星坐标拟合于多项式是完全可能的。这样在以后需要计算卫星坐标时只要调出多项式系数就可以计算得到卫星坐标,这大大提高了数据处理的效率。在各种多项式中,切比雪夫多项式^[4]的拟合效果最佳。

假设需要在时间间隔 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 计算 n 阶切比雪夫多项式系数。其中 t_0 为起始历元时刻, Δt 为拟合时间区间的长度。首先将变量 $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ 变换成 $\tau \in [-1, +1]$:

$$\tau = \frac{2}{\Delta t}(t - t_0) - 1, \quad t \in [t_0, t_0 + \Delta t] \quad (1)$$

则卫星坐标 X, Y, Z 的切比雪夫多项式为:

$$\begin{aligned} X(t) &= \sum_{i=0}^n C_{X_i} T_i(\tau) \\ Y(t) &= \sum_{i=0}^n C_{Y_i} T_i(\tau) \\ Z(t) &= \sum_{i=0}^n C_{Z_i} T_i(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中, n 为切比雪夫多项式的阶数。 $C_{X_i}, C_{Y_i}, C_{Z_i}$ 分别为 X 坐标分量、 Y 坐标分量、 Z 坐标分量的切比雪夫多项式系数。

在切比雪夫多项式中根据如下递推公式确定 T_i :

$$\begin{aligned} T_0(\tau) &= 1 \\ T_1(\tau) &= \tau \\ T_n(\tau) &= 2\tau T_{n-1}(\tau) - T_{n-2}(\tau); \quad |\tau| \leq 1, n \geq 2 \end{aligned} \tag{3}$$

下面将叙述如何求解切比雪夫多项式系数。为了便于说明后叙步骤, 仅以 X 坐标分量为例说明。

根据广播星历文件提供的开普勒轨道参数和摄动改正参数计算 $\tau_k (k = 1, 2, 3 \dots m, m \geq n + 1, n$ 为选定的多项式次数) 时刻的卫星位置, (X_k, Y_k, Z_k) 组成坐标文件^[5]。

设 X_k 为观测值, 则误差方程为 $V_{X_k} = \sum_{i=0}^n C_{X_i} T_i(\tau_k) - X_k, (k = 1, 2, \dots, m; i = 0, 1, 2, \dots, n)$, 误差方程的矩阵展开式为:

$$\begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{X_2} \\ V_{X_3} \\ \vdots \\ V_{X_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(\tau_1) & T_1(\tau_1) & T_2(\tau_1) & \dots & T_n(\tau_1) \\ T_0(\tau_2) & T_1(\tau_2) & T_2(\tau_2) & \dots & T_n(\tau_2) \\ T_0(\tau_3) & T_1(\tau_3) & T_2(\tau_3) & \dots & T_n(\tau_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(\tau_m) & T_1(\tau_m) & T_2(\tau_m) & \dots & T_n(\tau_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{X_0} \\ C_{X_1} \\ C_{X_2} \\ \vdots \\ C_{X_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

令 $V_X = [V_{X_1} \ V_{X_2} \ V_{X_3} \ \dots \ V_{X_m}]^T$
 $f_X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_m]^T$
 $M = [C_{X_1} \ C_{X_2} \ C_{X_3} \ \dots \ C_{X_n}]^T$

$$B = \begin{bmatrix} T_0(\tau_1) & T_1(\tau_1) & T_2(\tau_1) & \dots & T_n(\tau_1) \\ T_0(\tau_2) & T_1(\tau_2) & T_2(\tau_2) & \dots & T_n(\tau_2) \\ T_0(\tau_3) & T_1(\tau_3) & T_2(\tau_3) & \dots & T_n(\tau_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(\tau_m) & T_1(\tau_m) & T_2(\tau_m) & \dots & T_n(\tau_m) \end{bmatrix}$$

则式(4)可写成向量表达式

$$V_X = BM - f_X \tag{5}$$

设泛函 $J = \sum_{i=1}^m V_{X_i}^2 = \langle V_X, V_X \rangle = \langle BM - f_X, BM - f_X \rangle$, 当 M 满足最小二乘解, 即使泛函 J 达到最小时, 泛函 J 关于 M 的一阶变分为 0, 即 $\frac{1}{2} \delta J = 0$, 而 $\delta J = 2 \langle BM - f_X, B \delta M \rangle = 2 \langle B^T BM - B^T f_X, \delta M \rangle = 0$ 。因 δM 任意, 故必须使

$$B^T BM - B^T f_X = 0 \tag{6}$$

设 $N = B^T B \quad f_{ex} = B^T f_X$
则式(6)变为 $NM - f_{ex} = 0 \tag{7}$

方程(7)的解为 $M = N^{-1} f_{ex}$ 。这样, M 各分量便为切比雪夫多项式拟合系数 C_{X_i} 。同理, 对 Y, Z 分量完成上述类似的计算便可以得到关于某一 GPS 卫星 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 在时间区间内各坐标分量的切比雪夫多项式拟合系数 $C_{X_i}, C_{Y_i}, C_{Z_i} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 。利用这些系数根据式(1)、(2)和(3)就可以计算 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 时间区间内任意时刻的卫星坐标。

2 计算实例

为了验证切比雪夫多项式拟合的可靠性和精度问题, 从 Internet 网上下载了 1 号 GPS 卫星 2002 年 7 月 14 日的广播星历数据(RINEX 格式)。并编制计算程序处理这一天的数据^[3]。以下给出的计算结果是基于这一天 1 h 至 6 h 时段的数据。纵坐标即拟合差是拟合坐标值与直接用广播星历计算出的坐标值之差, 横坐标是间隔 5 min 一次的观测历元。

图 1 显示的是以 1.5 h 为时间间隔的 10 阶切比雪夫多项式 X, Y, Z 坐标分量的拟合差值。

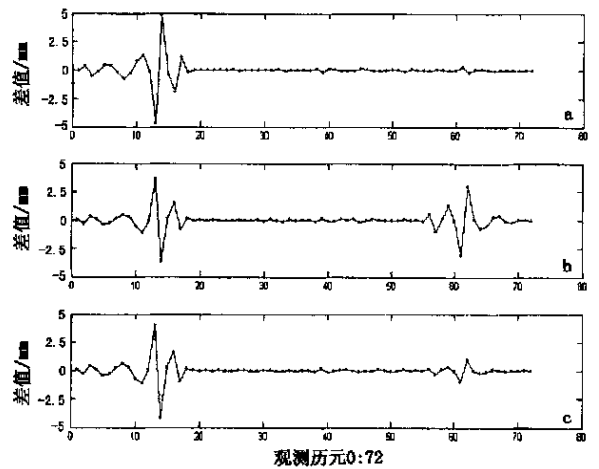


图 1 切比雪夫多项式 X, Y, Z 坐标分量
(a, b, c) 拟合差值图

切比雪夫多项式的阶数与拟合数据所选取的时间间隔都会对拟合精度产生影响。下面利用切比雪夫多项式分别对阶数和时间间隔进行讨论。首先试验不同的阶数。本文只分别列出卫星坐标 X 分量拟合效果图(图 2)。

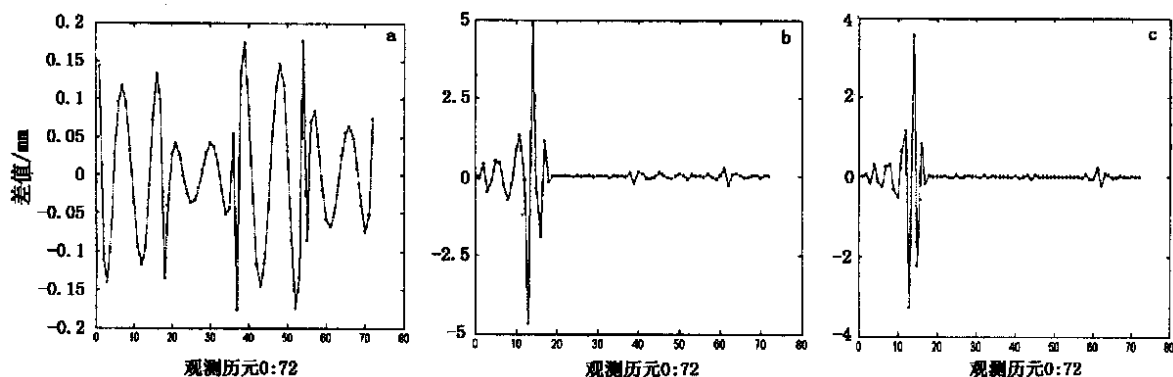


图2 切比雪夫5阶多项式(a)、10阶多项式(b)和13阶多项式(c) X坐标分量拟合差值图

图2是以1.5 h为时间间隔,取不同的切比雪夫多项式阶数的拟合差值图。可以看出,阶数取的越大,拟合差越小,也就是拟合精度越高。但是超出一定范围后,多项式阶数越高,拟合效果反而越差。在此例中,当切比雪夫多项式阶数超过18阶后,矩

阵 $T'^* T$ 变成奇异矩阵,也即矩阵的行列式接近于0,矩阵变得接近不可逆或者矩阵的误差很大。

当固定切比雪夫多项式的阶数为10时,选取不同的时间间隔,它们的比较如图3所示。

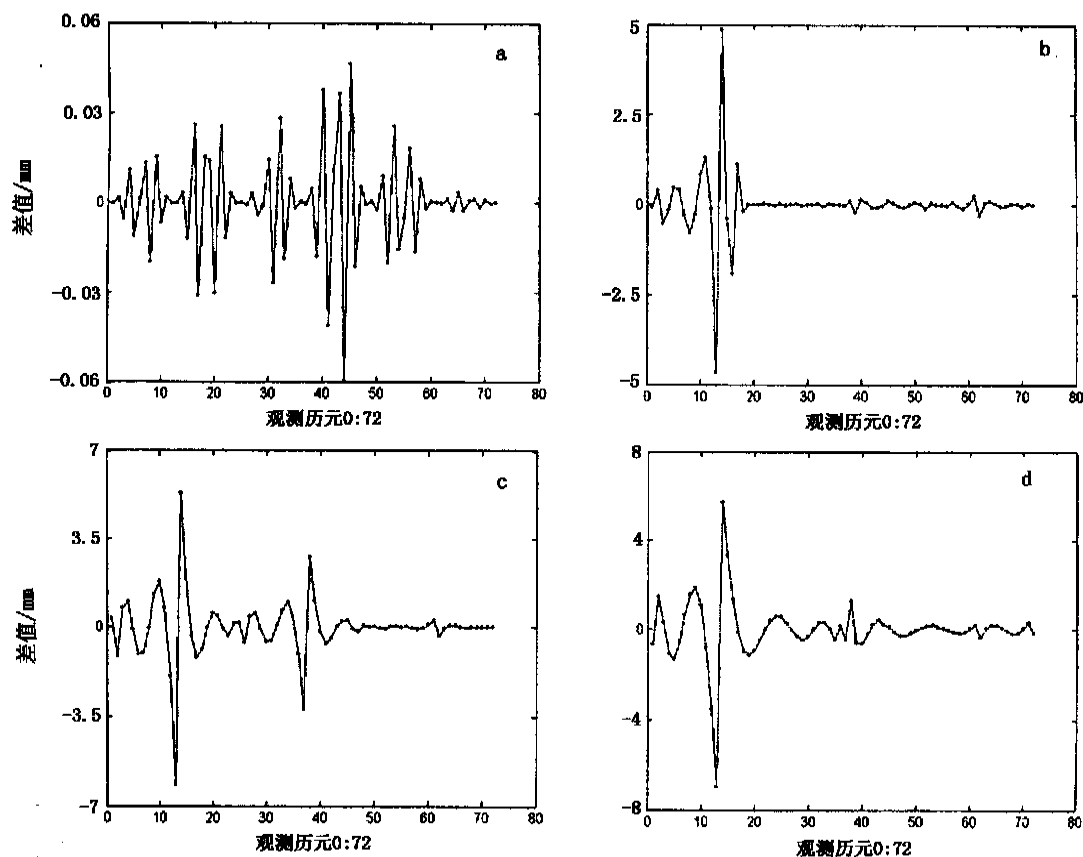


图3 X坐标分量拟合差值图,时间间隔为:(a)1 h,(b)1.5 h,(c)2 h,(d)3 h

从图3可以看出,间隔时间取的越紧密,拟合差越小,拟合精度越高。特别是当时间间隔为1 h时,

拟合精度比其他高很多。而时间间隔从1.5 h增加到3 h时拟合差却没有明显的变化。

3 结论

根据以上算例,可以得出以下结论:

(1)用切比雪夫多项式拟合的方法来逼近某一段时间内的卫星轨道是可行的,精度能够满足要求。

(2)通过本文实例计算表明,在一定范围内,多项式阶数取得越高,拟合精度越高。但是超出一定范围后,多项式阶数越高,拟合效果反而越差。在此例中,当切比雪夫多项式阶数超过18阶后,矩阵 T' 变成奇异矩阵,也即矩阵的行列式接近于0,矩阵变得接近不可逆或者矩阵的误差很大。

(3)对于以1.5 h为时间间隔的广播星历的切比雪夫多项式拟合而言,数值计算结果表明,切比雪夫多项式阶数的选取从8阶到17阶(前面已经提到不能超过18阶)的拟合精度实际相差很小,它们都可以达到毫米级精度的要求。但是综合考虑计算切比雪夫多项式所耗的时间及内存空间以及利用广播星历计算卫星坐标所要求达到的精度,所以用10阶

切比雪夫多项式拟合1.5 h时间间隔的广播星历是比较适宜的,同时还可根据实际精度需要对切比雪夫多项式阶数进行合理的选择。

(4)用切比雪夫多项式进行GPS卫星轨道标准化,具有计算公式简捷,占用计算机内存空间少,计算速度快,能满足精度要求等优点,此方法在GPS定位测量中为实现卫星轨道标准化提供了一种较好的,行之有效的方法。

参考文献

- 1 周忠谟,易杰军,周琪.GPS卫星测量原理与应用.北京:测绘出版社,2000
- 2 乔仰文,赵长胜.GPS卫星定位原理及其在测绘学中的应用.北京:教育科学出版社,2000
- 3 李洪涛,许国昌,薛鸿印,等.GPS应用程序设计.北京:科学出版社,2000
- 4 奚梅成,刘儒勋.数值分析方法.合肥:中国科学技术大学出版社,1995
- 5 魏子卿,葛茂荣.GPS相对定位的数学模型.北京:测绘出版社,1998

Chebyshev Polynomial Fitting Model for GPS Orbit Calculation

Yu Peng Sun Xuejin Zhao Shijun

(Institute of Meteorology, PLA Univ. of Sci. & Tech., Nanjing 211101)

Abstract: It is important to get satellite coordinates continually in GPS positioning. Real-time satellite coordinates can be gained according to broadcast ephemeris received. A great deal of memory is required in order to get satellite coordinates. The Chebyshev polynomial was applied to fit satellite coordinates of the broadcast ephemeris to realize satellite orbit standardization. The precision in fitting satellite coordinates of broadcast ephemeris by the Chebyshev polynomial and the rational choice of polynomial orders of and time intervals are analyzed. Some meaningful conclusions are made.

Key words: GPS, broadcast ephemeris, satellite coordinate, Chebyshev polynomial