

拓扑分子格中 ST_{-1} 、 ST_0 及 ST_1 的分离性冯玉英¹, 周伟灿²

(1. 南京动力高等专科学校, 南京 210042; 2. 南京气象学院数学系, 南京 210044)

摘 要: 在拓扑分子格中进一步讨论了 ST_{-1} 的性质, 引进了 ST_0 、 ST_1 分离性概念, 并研究了其相应的性质。

关 键 词: 拓扑分子格; 极大点的连通支; ST_{-1} 、 ST_0 、 ST_1 的分离性; 积空间

中图分类号: O189.11 **文献标识码:** A

文献[1]中利用 ST_{-1} 刻画了元的层次结构, 并得到元的良好运算保并的 12 个等价条件, 从而解决了王国俊¹⁾ 提出的 L -fts 中有待解决的 10 个问题中的第 3 个问题“(A B)^d = A^d B^d 的充要条件是什么?”本文在此基础上又得到了它的若干重要性质。类似于文献[1], 我们以分子格的极大点相通支为基础, 定义拓扑分子格的 ST_0 及 ST_1 分离性, 由此得到它们既强于 ST_{-1} , 又与 ST_{-1} 有区别的一些好的性质。

为讨论方便, 在分子格 L 中, 本文用 C 表示极大点的相通支族, S_λ 表示含点 λ 的极大点的相通支, $(L_a, \eta_a)^{[2]}$ 表示 $TML(L, \eta)$ 的子空间。未说明的概念及符号见文献[1, 3~7]。

1 ST_{-1} 的分离性

定理 1 $(L(M), \eta)$ 是 ST_{-1} 的充要条件是对 L 的任二点 x, y , 当 $x < y \leq S(S - C)$ 时, 有 $Q \eta(y)$, 使得 $x \leq Q$ 。

证明 由 ST_{-1} 的定义知必要性成立, 现证充分性。

若 $S - C, x, y \leq S, y \not\leq x$, 则 $x < x \vee y \leq S$ 。记 $v = x \vee y$, 由条件知存在 $Q \eta(v)$, 使 $x \leq Q$, 从而 $y \not\leq Q$ (否则 $x \vee y \leq Q$, 与 $Q \eta(v)$ 矛盾), 即 $Q \eta(y)$, 从而 $(L(M), \eta)$ 为 ST_{-1} 的。

定理 2 $(L(M), \eta)$ 是 ST_{-1} 的充要条件是对任意的 $x < y \leq S$, 有 $y \not\leq x^-$, 其中 $S - C$ 。

证明 “充分性”对 $\forall x < y \leq S, S - C$, 因为 $(L(M), \eta)$ 是 ST_{-1} 的, 所以存在 $Q \eta(y)$, 使得 $x \leq Q$ 。因 L 为分子格, 所以必存在分子 $a \leq y$, 使 $a \not\leq Q$, 所以 $Q \eta(a)$, 而 $x \leq Q$, 由附着点定义得 $a \not\leq x^-$, 于是 $y \not\leq x^-$ 。

“必要性”因对 $\forall x < y \leq S$, 有 $y \not\leq x^-$, 则存在分子 $e \leq y, e \not\leq x^-$, 故取 $Q = x^- \vee \eta(e), x \leq Q$ 。又因为 $e \leq y$, 所以 $y \not\leq Q$, 即 $Q \eta(y)$, 使 $x \leq Q$ 。由定理 1 得 $(L(M), \eta)$ 是 ST_{-1} 的。

从定理 1 及定理 2 关于 ST_{-1} 的两个等价命题可以看出, 定义 ST_{-1} 的分离性可以用更明

确或更“弱”的条件,即只要在同一相通支中利用具有偏序的点来刻画就行了。

定理 3 若 $(L(M), \eta)$ 是 ST^{-1} 的,则对 L 的任一非零点 $x, \bar{x}$ 的成份必为 $\bar{x}$ 的成份。

证明 因为 $(L(M), \eta)$ 是 ST^{-1} 的,所以 $(L(M), \eta)$ 必是 T^{-1} 的,从而当 $x \in M$ 时, x 必是 $\bar{x}$ 的成份。当 $x \notin M$ 时,假设 x 的成份不全是 $\bar{x}$ 的成份,记 $A_1 = \{a_\alpha \mid \alpha \in T_1, a_\alpha \text{ 同是 } x \text{ 与 } \bar{x} \text{ 的成份}\}; A_2 = \{a_\alpha \mid \alpha \in T_2, a_\alpha \text{ 是 } x \text{ 的成份,但不是 } \bar{x} \text{ 的成份}\}$ 。因 $x \leq \bar{x}$,所以 $\forall \alpha \in T_2, \bar{x}$ 中必存在成份 b_α ,使 $a_\alpha < b_\alpha \leq \bar{x}$,把这些 $b_\alpha (\alpha \in T_2)$ 的全体记为 B ,同时令 $y \triangleq \{A_1 \cup B\}$,显然 $x < y \leq \bar{x}$,因 x 为 L 的点,故 $\exists S \in C$,使 $x \leq S$ 。由 y 的构造及 S 的定义知 $x < y \leq S$ 。再由 ST^{-1} 的定义及定理 1 得 $y \not\leq \bar{x}$,这与上述 $y \leq \bar{x}$ 矛盾,所以 x 的成份必是 $\bar{x}$ 的成份。

须指出定理 3 的逆命题不成立。

例 1 如图 1 菱形格 $L_1, M = \{a, b, c, 1\}, \eta = \{0, 1, a, d\}, (L(M), \eta)$ 是 TML 。由定义易知 $\bar{b} = d, \bar{c} = d, \bar{1} = 1, \bar{a} = a, \bar{d} = d$,可见 $L(M)$ 中的所有点 x 的成份均是 $\bar{x}$ 的成份。但因 $L(M)$ 仅有一个极大点的相通支 $S = \{1, b, c, d\}$,而 b, d 均为 L 的点,而 b, d 的远域相同,均为 $0, a$,即 $\forall Q \in \eta(d)$,都有 $Q \in \eta(b)$,所以它不是 ST^{-1} 的。

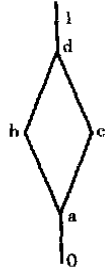


图 1 菱形格 L_1
Fig.1 Rhombic lattice L_1

2 ST_0 的分异性

定义 设 $(L(M), \eta)$ 是 TML ,如果对 L 的任二点 x, y ,当 $x \neq y$ 时,存在 $P \in \eta(x)$,使 $y \leq P$ 或存在 $Q \in \eta(y)$,使 $x \leq Q$,则称 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的。

由定义可得到下面两个结论。

(1) ST_0 的必是 ST^{-1} 的,反之则不一定成立。

例 2 设 $X = L = [0, 1], \eta = \{[\lambda] \mid \lambda \in L\}$,则 (L^X, η) 为 TML 。 L^X 的极大点的相通支为 X 上的分明点 $x_1 (x_1 \in [0, 1])$ 。对 $\forall x_\lambda < x_\mu \leq x_1$ (这里 $0 \leq \lambda < \mu \leq 1, x \in [0, 1]$),存在 $P = [\lambda]$ 使得 $x_\mu \leq P$,所以 (L^X, η) 是 ST^{-1} 的,但对 $x_\lambda \neq y_\lambda (\lambda \in [0, 1], x \neq y)$ 来说,定义中的条件不成立,所以 (L^X, η) 不是 ST_0 的。

(2) ST_0 的一定是 T_0 的,反之不成立。

例 3 如图 2, $L = \{0, 1, d, b, a\}, M = \{d, b, 1\}, \eta = \{0, 1, d, a\}$,容易验证 $(L(M), \eta)$ 是 TML ,下面验证 $(L(M), \eta)$ 是 T_0 的。

对 $d \neq b$,存在 $P = d \in \eta(b)$,使 $d \leq P$;对 $d \neq 1$,存在 $P = d \in \eta(1)$,使 $d \leq P$;对 $b \neq 1$,存在 $Q = a \in \eta(1)$,使 $b \leq Q$,总之,对 $\forall e, f \in M, e \neq f$ 有 $P \in \eta(e)$,使 $f \leq P$ 或存在 $Q \in \eta(f)$,使 $e \leq Q$,从而 $(L(M), \eta)$ 是 T_0 的。

因分子格 L 中仅有一个极大点的相通支 $S = \{1\}$,故 a 也是 L 的点,但对 $b < a$ 来说,其远域都是 0 和 d ,所以 ST_0 定义中的条件不成立,因此 $(L(M), \eta)$ 不是 ST_0 的。

定理 4 $(L(M), \eta)$ 是 TML ,则它是 ST_0 的充要条件是 L 的任两点 x, y ,当 $x \neq y$ 时,有 $\eta(x) \neq \eta(y)$ 。

证明 “充分性”设 L 的任两点 x, y ,且满足 $x \neq y$ 。因 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的,则 $\exists P \in \eta(x)$,使 $y \leq P$,从而 $P \in \eta(y)$ 或存在 $Q \in \eta(y)$,使 $x \leq Q$,从而 $Q \in \eta(x)$,于是 $\eta(x) \neq \eta(y)$ 。

“必要性”设 $(L(M), \eta)$ 不是 ST_0 的,则有两点 $x, y, x \neq y$,使得对 $\forall P \in \eta(x), y \not\leq P$,从而

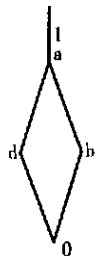


图 2 菱形格 L_2
Fig.2 Rhombic lattice L_2

$P \not\leq \eta(y)$, 即 $\eta(x) \subset \eta(y)$ 。同时对 $\forall Q \not\leq \eta(x)$, 有 $x \not\leq Q$, $Q \not\leq \eta(x)$, 即 $\eta(y) \subset \eta(x)$, 于是 $\eta(x) = \eta(y)$, 与已知矛盾, 所以 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的。

定理 5 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的充要条件是对 L 的任二点 x, y , 当 $x \neq y$ 时, 有 $x \not\leq \bar{y}$ 或 $y \not\leq \bar{x}$ 。

证明 “充分性” 设 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的, 则由定理 4 对 L 的任二不同点 x, y 有 $\eta(x) \neq \eta(y)$, 不妨设 $P \not\leq \eta(x)$, 但 $P \leq \eta(y)$, 这时 $\bar{y} \leq P$, 所以存在分子 $a \leq x$, 但 $a \not\leq P$, 于是 $a \not\leq \bar{y}$, 从而 $x \not\leq \bar{y}$ 。

“必要性” 对 L 的任二不同点 x, y , 取 $P = \bar{y}$, $Q = \bar{x}$, 因 $x \not\leq P$ 而 $y \leq P$, 或 $y \not\leq Q$ 而 $x \leq Q$, 得 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的。

定理 6 若 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的, 则 $M^* \leq 2^{q(L(M), \eta)}$, 其中 $M^* = \{\text{全体 } L \text{ 的点}\}$ 。

由定理 4 可得一映射 $f: M^* \rightarrow 2^\eta, f(x) = \eta(x), x \in M^*$, 于是即得上述结果。

定理 7 (遗传性) $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的充要条件是它的每个子空间 (L_a, η_a) 都是 ST_0 的。

证明 充分性是显然的, 下证必要性。

设 x, y 是 L_a 中的任两不同的点, 则 $x, y \leq a, x \neq y$, 由极大点的相通支的性质知 x, y 也是 L 的二不同的点。由 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的, 则 $\exists P \not\leq \eta(x)$, 使 $y \leq P$ 或 $\exists Q \not\leq \eta(y)$ 使 $x \leq Q$, 又因为 $x, y \leq a$, 所以有 $P_a = P \wedge a \not\leq \eta(x), y \leq P_a$ 或 $Q_a = Q \wedge a \not\leq \eta(y)$, 使 $x \leq Q_a$, 从而 (L_a, η_a) 是 ST_0 的。

定理 8 (可积性) (L, η) 是 $\{L_t, \eta_t\}_{t \in T}$ 的积空间, (L, η) 是 ST_0 的, 则对 $\forall t \in T, \{L_t, \eta_t\}$ 是 ST_0 的。

由文献[2]中定理 3.1 及上述定理 7 即得此结论。

定理 9 $(L(M), \eta)$ 是可数个 $TML\{L_t, \eta_t\}_{t \in T}$ 的积空间, 则 (L, η) 是 ST_0 的充要条件是 $\forall t \in T, \{L_t, \eta_t\}$ 是 ST_0 的。

证明 必要性由定理 8 得到。下证充分性。

设 x, y 为 L 中的任二点, $x \neq y$, 则必存在 L 中的极大点相通支 S_x, S_y , 使 $x \leq S_x, y \leq S_y$, 由文献[2]中推论 1.2 知, 存在 $t_1, t_2 \in T$, 有 L_{t_1}, L_{t_2} 中极大点的相通支 S_{t_1}, S_{t_2} 使 $S_x = (S_{t_1})^*, S_y = (S_{t_2})^*$, 因此可设 $x = (x_{t_1})^*, y = (y_{t_2})^*$, 且 $x_{t_1} \leq S_{t_1}, y_{t_2} \leq S_{t_2}$ 。

1) 若 $t_1 = t_2 = t$, 则由 (L_t, η_t) 是 ST_0 的及 $x \neq y$ 即 $x_t \neq y_t$ 知一定存在 $P_t \not\leq \eta_t(x_t)$, 使 $y_t \leq P_t$ 或存在 $Q_t \not\leq \eta_t(y_t)$ 使 $x_t \leq Q_t$, 因此有 $p_t^{-1}(P_t) \not\leq \eta((x_t)^*) = \eta(x)$, 使 $y = (y_t)^* \leq p_t^{-1}(P_t)$ 或存在 $p_t^{-1}(Q_t) \not\leq \eta((y_t)^*) = \eta(y)$, 使 $x = (x_t)^* \leq p_t^{-1}(Q_t)$ 。

2) 若 $t_1 \neq t_2$, 则 x_{t_1} 是 L_{t_1} 中的点, y_{t_1} 是 L_{t_2} 的点, 故对 $\forall P_{t_1} \not\leq \eta_{t_1}(x_{t_1})$ 有 $p_{t_1}^{-1}(P_{t_1}) \not\leq \eta((x_{t_1})^*) = \eta(x)$ 都使 $y = (y_{t_2})^* \leq p_{t_1}^{-1}(P_{t_1})$ 。

综合 1)、2) 可得 $(L(M), \eta)$ 是 ST_0 的。

3 ST_1 的分离性

定义 设 $(L(M), \eta)$ 是 TML , 若对 L 中的任二点 x, y , 当 $x \not\leq y$ 时, 有 $P \not\leq \eta(x)$, 使 $y \leq P$, 则称 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的。

下面我们先来讨论 ST_1 的等价命题。

定理 10 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的充要条件是对 L 中的任二点 x, y , 当 $x \not\leq y$ 时, 有 $x \not\leq \bar{y}$ 。

证明 “充分性” 因为 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的, 所以对 L 中的任二点 x, y , 当 $x \not\leq y$ 时, 有 $P \not\leq \eta(x)$, 使 $y \leq P$ 。若 $x \in M$, 则据附着点定义得 $x \not\leq \bar{y}$; 若 $x \notin M$, 因 $L(M)$ 是分子格, 所以存在分子

$a \leq x$, 而 $a \not\leq y$, 由上证知 $a \not\leq \bar{y}$, 从而有 $x \not\leq \bar{y}$ 。

“必要性”设 x, y 为 L 中的任二点, $x \not\leq \bar{y}$, 则由已知 $x \not\leq \bar{y}$ 及 $L(M)$ 为分子格知必存在分子 $e \leq x$, 但 $e \not\leq \bar{y}$, 故存在 $P \in \eta(e)$, 使 $y \leq P$, 又因 $e \leq x$, 所以 $x \leq P, P \in \eta(x)$, 所以 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的。

定理 11 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的充要条件是 $x^{d(n)} = 0$, 其中 x 是 L 的点。

证明 “充分性”假设存在 $a \in M$, a 为 x 的良聚点, 则由文献[5]中定理 4.2 有 $a \leq \bar{x}$ 且 $a \not\leq x$, 这与定理 10 矛盾, 所以 $x^{d(n)} = 0$ 。

“必要性”设 x, y 为 L 中的任二点 x, y , 满足 $x \not\leq y$, 因 $y^{d(n)} = 0$ 且 $\bar{y} = y \vee y^{d(n)}$ (文献[5]中定理 4.1), 所以 $\bar{y} = y, x \not\leq y = \bar{y}$, 由定理 10 得 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的。

定理 12 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的充要条件是 L 中的任一点 x 都是闭的。

证明 由定理 11, 若 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的, 则 $x^{d(n)} = 0$, 于是由 $\bar{x} = x \vee x^{d(n)} = 0$ 得 $\bar{x} = x$ 。反之若有分子 a 为 x 的良聚点, 则由文献[5]中定理 4.2 得 $a \leq \bar{x}$ 且 $a \not\leq x$, 而 x 为闭的, 即 $\bar{x} = x$, 则上式出现矛盾, 故 $x^{d(n)} = 0$ 。

推论 $(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的, 则 L 的每个元的良导元都是闭的。

这由文献[5]中定理 4.6 及上面定理 12 得到。

由定义很明显可得到 $ST_1 \Rightarrow T_1; ST_1 \Rightarrow ST_0 \Rightarrow ST_{-1}$, 但其逆均不真。

例 4^[1] 设 $X = [0, 1], L = [0, 1]^{[0, 1]}, A \subseteq L^X$, 规定 A 为闭集当且仅当 $A = \{0, 1\}$ 或 $\text{Supp} A < \bar{\omega}$ 且 $x \in \text{Supp} A, \text{Supp} A(x) < \bar{\omega}$ 记这种 A 的全体为 η , 则 η 对有限并及任意交关闭, 所以 (L^X, η) 是 TML 。在 (L^X, η) 中, 每个分子 $x_\lambda (\lambda \text{ 为 } [0, 1]^{[0, 1]} \text{ 中的分子, 即 } [0, 1] \text{ 上的 } F \text{ 点, } \text{Supp} \lambda = 1)$ 都是闭集, 所以 (L^X, η) 是 T_1 的, 但 $x_1 \notin \eta$, 所以 x_1 不是闭集, 由 ST_1 的等价命题得它不是 ST_1 的。

例 5 设 L 为全层下格 $L = \{0, \lambda, 1\}, X = \{x, y\}, \eta = \{0, 1, x_\lambda, x_1, y_\lambda, x_\lambda \vee y_\lambda, x_\lambda \vee y_1, x_1 \vee y_\lambda\}$, 易证 η 是 L^X 上的余拓扑, 所以 (L^X, η) 是 TML 。下面验证 (L^X, η) 是 ST_0 的。

首先若 L^X 中的二点中有一点为 0, 则显然满足 ST_0 的条件, 不妨设这二点为非零点, 而 L^X 中非零点仅有 $x_\lambda, x_1, y_\lambda, y_1$, 于是对 $x_\lambda \neq x_1 (x_\lambda < x_1)$, 存在 $P_1 = x_\lambda \in \eta(x_1)$, 使 $x_\lambda \leq P_1$ 。

对 $y_\lambda \neq y_1 (y_\lambda < y_1)$, 存在 $P_2 = y_\lambda \in \eta(y_1)$, 使 $y_\lambda \leq P_2$ 。

对 $x_\lambda \neq y_\lambda, x_\lambda \neq y_1, x_1 \neq y_\lambda, x_1 \neq y_1$, 由于 x_1 均是 y_1, y_λ 的远域, 所以只要取 $P_3 = x_1$ 使得 $x_\lambda < x_1 \leq P_3$, 从而对任意的二点 x, y , 当 $x \neq y$ 时均能满足 ST_0 定义的条件, 所以 (L^X, η) 是 ST_0 的。但 (L^X, η) 不是 ST_1 的, 这是因为 $\eta(x_\lambda) = \{0, y_\lambda\}$, 而 $x_\lambda \not\leq y_1$, 不存在这样的 $P \in \eta(x_\lambda)$, 使 $y_1 \leq P$ 。

类似于 ST_0 分离性, ST_1 分离性也具有遗传性、可积性。

定理 13 $TML(L(M), \eta)$ 是 ST_1 的充要条件是 $(L(M), \eta)$ 的每个子空间都是 ST_1 的。

定理 14 (L, η) 是 $\{(L_t, \eta_t)\}_{t \in T}$ 的积空间, 又 (L, η) 是 ST_1 的, 则对 $\forall t \in T, (L_t, \eta_t)$ 是 ST_1 的。

定理 15 $(L(M), \eta)$ 是可数个 $TML\{(L_t, \eta_t)\}_{t \in T}$ 的积空间, 则 (L, η) 是 ST_1 的充要条件是 $\forall t \in T, (L_t, \eta_t)$ 是 ST_1 的。

上述 3 定理的证明类似于定理 7、定理 8、定理 9, 故略去。

致谢: 本文得到宣立新教授的热心指导和帮助, 在此深表谢意。

参考文献:

- [1] 宣立新. TML 中元的明聚点和 ST_1 分离性[J]. 数学研究与评论, 1998, 18(4): 633 ~ 634
- [2] 宣立新. 拓扑分子格的子空间和商空间[J]. 南京动力高等专科学校学报, 1997, 10(4): 5 ~ 9
- [3] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988. 191 ~ 206
- [4] WANG Guojun. Theory of topological molecular lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 47: 351 ~ 376
- [5] 宣立新. 分子格的极大点的相通支及其应用[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(1): 42 ~ 48
- [6] 宣立新. TML 中导元运算保并的等价条件[J]. 数学研究与评论, 1999, 19(1): 157 ~ 158
- [7] 宣立新. 拓扑分子格的积空间初探[J]. 南京动力高等专科学校学报, 1998, 11(1): 4 ~ 8

ST_{-1} 、 ST_0 、 ST_1 Separation properties in the topological molecular lattices

Feng Yu-ying¹, Zhou Wei-can²

(1. Nanjing Power College, Nanjing 210042; 2. Department of Mathematics, NIM, Nanjing 210044)

Abstract: In this paper, we will go a step further to discuss the properties of ST_{-1} separation axiom, introduce the concept of ST_0 , ST_1 separation axiom and study their corresponding separation properties in the TML.

Key words: TML; connected branch of maximum point; separation property of ST_0 , ST_1 and ST_{-1} ; product space