

全型垂直涡度倾向方程和倾斜涡度发展*

吴国雄

(中国科学院大气物理研究所
大气科学和地球流体力学国家重点实验室(LASG), 北京, 100080)

刘还珠

(中国气象局国家气象中心, 北京, 100081)

摘 要

文中证明了不仅包括动力因子,而且包括热力因子、摩擦耗散及非绝热加热作用的和可用于三维空间的全型垂直涡度倾向方程。证明经典的、平面上的涡度方程只是它的特例。并且用该全型涡度方程严格证明了倾斜涡度发展(SVD)理论。沿着倾斜等熵面下滑的气块,当热力参数 C_D 减小时,其垂直涡度将发展。最后通过用 θ 坐标模式模拟一次西南低涡的形成,证明 SVD 引起的涡度发展要比传统所考虑的辐合项的贡献大一个量级。

关键词: Ertel 位涡, 盒子定律, 外切平面定律, 热力参数 C_D 。

1 引 言

垂直涡度的急剧发展常伴有剧烈的灾害天气。垂直涡度倾向方程(以下简称涡度方程)是控制大气运动的基本方程。传统的涡度方程是通过动量方程求旋度再点乘垂直单位矢量得到的,具有明显的平面特征和动力特征。大量的天气实践表明,稳定度的变化,斜压性的改变,以及与风的垂直切变相关的高、低空急流的发展,常与涡度发展相联系。但这些热力项并不直接出现在涡度方程中,使应用涡度方程进行涡度分析时受到了限制。

从完整的干空气大气方程组出发, Ertel^[1](1942) 导得了 Ertel 位涡 P_E 守恒方程。在引入水汽方程后, 吴国雄等^[2](1995) 导得了饱和湿空气位涡 P_m 的变化方程。这些方程的显著特征是三维空间性, 并包含有热力因子的影响。现以这些工作为基础, 在第 1 节中首先导出全型的垂直涡度倾向方程。在第 2 节中, 利用 Ertel 位涡守恒的特征, 证明“盒子定律”和“外切平面定律”。第 3 节利用全型垂直涡度倾向方程, 证明了倾斜涡度发展(SVD)理论。第 4 节利用一个 θ 坐标模式对一次典型的西南低涡的形成进行数值模拟, 以验证 SVD 的重要性。若干结论和讨论在第 5 节给出。

* 初稿时间: 1997 年 4 月 16 日; 修改稿时间: 1997 年 10 月 13 日。

资助课题: 本研究得到国家自然科学基金重点项目“49635170”及项目“49575265”的联合资助。

2 全型垂直涡度倾向方程

由三维涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{V} \times \zeta) = \nabla \cdot P \times \nabla \alpha + F_{\zeta}$$

湿空气热力学方程

$$\frac{D\theta_e}{Dt} = Q$$

连续方程

$$\frac{D\alpha}{Dt} - \alpha \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

及相当位温定义

$$\theta_e = \theta_{\text{exp}} \left[\frac{Lq}{c_p T} \right]$$

吴国雄等^[2](1995) 导得如下的湿空气位涡变化方程(文[2]中方程(9))

$$\frac{DP_m}{Dt} = \alpha(\nabla \cdot P \times \nabla \alpha) \nabla \cdot \theta_e + \alpha \nabla \cdot \theta_e F_{\zeta} + \alpha \zeta \nabla \cdot Q_m \quad (1)$$

其中绝对涡度 $\zeta = \nabla \cdot (\mathbf{V} + 2\Omega)$, Ω 为地球自转角速度; F_{ζ} 为摩擦耗散; Q_m 为除了凝结潜热以外的干过程非绝热加热率; 全微分 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$; 湿位涡

$$P_m = \alpha \zeta \nabla \cdot \theta_e \quad (2)$$

比绝对涡度 $\xi_a = \alpha \zeta$ 。其它为气象上常用量。令比湿为零, 可得干空气 Ertel 位涡变化方程^[1]

$$\frac{DP_E}{Dt} = \alpha \nabla \cdot \theta F_{\zeta} + \xi_a \nabla \cdot Q \quad (3)$$

及 Ertel 位涡表达式

$$P_E = \xi_a \nabla \cdot \theta \quad (4)$$

这时 Q 代表一切的非绝热加热率。采用 z 坐标, 把 P_E 分解为垂直分量(下标 z 表示), 和水平分量(下标 s 表示, S 为沿着 θ 的水平梯度方向的单位矢量),

$$P_E = \xi_z \theta + \xi_s \theta \quad (5)$$

其中

$$\xi_s \theta = \xi_x \theta + \xi_y \theta = - \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial V_m}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial S}$$

其中 θ 的下标表示求偏微商的自变量, m 为平行于水平面上的 θ 线并指向 S 右侧的水平单位矢量。

由式(5)可得“比垂直绝对涡度”

$$\xi_z = (P_E - \xi_s \theta) / \theta = \frac{P_E}{\theta} - C_D, \quad \theta_z = 0 \quad (6)$$

这里热力学参数

$$C_D = \xi_s \theta / \theta, \quad \theta = 0 \quad (7)$$

为位涡水平分量与静力稳定度参数 θ_z 之比, 它正比于风垂直切变与斜压性之积除以静力稳定性。将式(6)对时间求全微商, 代入式(3), 并利用下述关系式

$$\frac{D\xi_z}{Dt} = \alpha \left[\frac{D\zeta}{Dt} + \beta v + (f + \zeta) \cdot \nabla \right] V \quad (8)$$

可得

$$\begin{aligned} & \frac{D\zeta}{Dt} + \beta v + (f + \zeta) \cdot \nabla V \\ &= - \frac{1}{\alpha \theta^2} \left[(P_E - \xi_s \theta) \frac{D\theta}{Dt} + \theta \xi_s \frac{D\theta}{Dt} + \theta \theta_s \frac{D\xi_s}{Dt} \right] \\ &+ \frac{1}{\theta} \cdot \nabla F_\zeta + \frac{1}{\theta} \zeta \cdot \nabla Q, \quad \theta = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)即为“全型垂直涡度倾向方程”。它不仅包涵动力项(左端), 还包含有静力稳定度的变化 $\frac{D\theta}{Dt}$, 斜压性的改变 $\frac{D\theta}{Dt}$, 以及风垂直切变的发展 $\frac{D\xi_s}{Dt}$ 等热力因子对垂直涡度发展的贡献; 还包含有摩擦耗散 F_ζ 和非绝热加热 Q 对涡度发展的贡献。当等熵面呈水平分布时, $\theta_z = 0$ 。则在绝热无摩擦的场合有

$$\frac{D}{Dt} [\alpha (f + \zeta) \theta] = \frac{D}{Dt} [IPV] = 0 \quad (10)$$

此即 Rossby 位涡守恒方程, 或等熵位涡 ($IPV = \alpha (f + \zeta) \theta$) 守恒方程 (Hoskins 等^[3], 1985)。因此, Rossby 位涡或等熵位涡守恒只是等熵面为水平面分布时的特例。

3 位涡守恒的盒子定律和外切平面定律

在无摩擦绝热的大气中, 由式(3)知位涡守恒, 由位涡表达式(4), 可得

$$P_E = \alpha \zeta_\theta \cdot \nabla \theta = \text{const} \quad (11)$$

其中, ζ_θ 是绝对涡度 ζ 在 $\nabla \theta$ 上的投影。在此基础上, 先研究位涡守恒关系中的两个基本特性。

3.1 盒子定律

当 θ 面为平行平面时, $\nabla \theta$ 为常数。设想一个盒子的底面和顶面各为等熵面 θ_1 和 θ_2 , 其无量纲厚度 $\Delta \theta = \alpha \zeta_\theta$ 。A 为底面 θ_1 上的一个质点, 也是比绝对涡度矢量 $\alpha \zeta$ 的原点。则其运动过程中位温守恒和位涡守恒的特征可用图 1a 表示, 并陈述为如下的“盒子定

律”:

无论质点 A 在盒子的一个面 θ_1 上如何运动和旋转, 其比绝对涡度矢量 $\alpha\zeta$ 的端点必定始终位于盒子的另一个对面 $\theta_2 (= \theta_1 + \Delta\theta)$ 上。

根据盒子定律, 当 θ 面为水平面时, 绝对涡度水平分量(即风的垂直切变)的变化是和其垂直分量的变化无关的。这即为 Rossby 位涡和 IPV 守恒的情况。

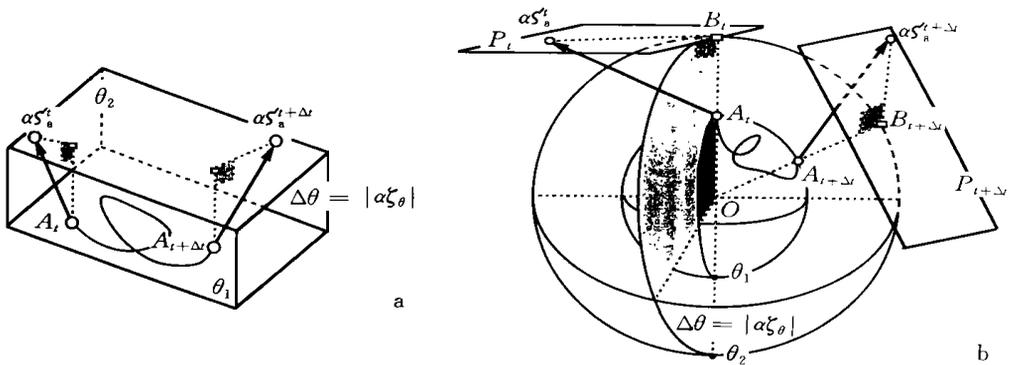


图 1 “盒子定律”和“外切平面定律”

- (a. “盒子定律”: 当 θ 面为平面时, 不管质块在盒子的一个面 θ_1 上如何移动和转动, 其比绝对涡度 ($\alpha\zeta$) 的矢端必定总位于盒子的另一个面 $\theta_2 (= \theta_1 + \Delta\theta)$ 上; b. 外切平面定律”: 当 θ 面为曲面时, 不管质块在 θ_1 面上如何移动和转动, 其比绝对涡度 ($\alpha\zeta$) 的矢端必定总位于另一个面 $\theta_2 (= \theta_1 + \Delta\theta)$ 过点 B 的外切平面 P 上)

3.2 外切平面定律

为简明起见, 设 θ 面为同心球面(图 1b), 这时 $\nabla \cdot \theta$ 为常数。假设内球面 θ_1 和外球面 θ_2 之间的无量纲厚度为 $\Delta\theta = \alpha\zeta_\theta$, A 为内球面 θ_1 上的一个点, 也是其比绝对涡度矢量 $\alpha\zeta$ 的原点。令矢径 OA 延伸交 θ_2 面于点 B , 平面 P 为球面 θ_2 过点 B 的外切平面。则其运动过程中位温守恒和位涡守恒的特征可用图 1b 表示, 并陈述为如下的“外切平面定律”:

无论质点 A 在内球面 θ_1 上如何运动和旋转, 其比绝对涡度矢量 $\alpha\zeta$ 的端点必定始终位于球面 $\theta_2 (= \theta_1 + \Delta\theta)$ 过点 B 的外切平面 P 上。

由于在这种场合, $\alpha\zeta$ 在 $\nabla \cdot \theta$ 上的投影 $\overline{AB} = \alpha\zeta_\theta$, 根据位涡守恒式(11), 上述定律的证明即可知晓。外切平面定律和盒子定律不同点在于, 当 $\alpha\zeta$ 的一个分量改变时, 另一个分量也必须有相应的改变。换言之, 当 $(\alpha\zeta)$ 的水平分量已知时, 其垂直分量可根据外切平面 P 唯一确定。这就为下面讨论倾斜涡度发展(SVD)的理论提供依据。在建立“盒子定律”和“外切平面定律”时, 假设 $\nabla \cdot \theta$ 为常数, θ 面平行或同心。这一假定并不影响后面的讨论。在下一节中还将看到, 由于位涡守恒式(11), 对垂直涡度的变化而言, $\nabla \cdot \theta$ 的变化总是被 $\alpha\zeta_\theta$ 的相应变化所补偿。

4 倾斜涡度发展(SVD)

采用 θ 坐标时, 令 n 表示沿 $\nabla \cdot \theta$ 方向的单位矢量, 则式(4)可写为

还由于 $n \cdot k > 0$, 于是

$$\cos \beta = \Theta / \theta > 0$$

把上述表达式代入式(13), 有

$$\xi_z = \frac{\xi_n}{\cos \beta} - \xi_s \tan \beta \quad \beta \quad \pi/2 \quad (14)$$

在北半球气旋生成的场合, $\xi_n > 0$ 。一般而言, ξ_s , θ 和 Θ 各项可正可负。但重要的是, 在式(13)中当

$$C_D = \xi_s \Theta / \theta < 0 \quad (15)$$

时, 式(14)可写成

$$\xi_z = \frac{\xi_n}{\cos \beta} + \xi_s \tan \beta, \quad \beta \quad \pi/2 \quad (16)$$

这时 ξ_z 是 β 的递增函数。这意味着, 当式(15) 满足时, 沿等熵面下滑的质块其垂直涡度将发展。用上置短线表示线段, 则表达式(16) 中下滑角 β 与 ξ_n 的关系还可用图2 的几何图象表示为:

$$\xi_z = \overline{CD} = \overline{DE} + \overline{EC} = \overline{AB} / \cos \beta + \overline{AC} \tan \beta$$

为 满足条件式(15), 在制作该图时, 已假定风垂直切变不变, 于是 $\xi_s = \xi_s^0 > 0$ 。否则, 当 ξ_s 为负值时, 式(15) 条件则不满足。根据图2, ξ_z 将随 β 的增加而增加。当等熵面十分陡立时, ξ_z 将可变得很大, 亦即

$$\xi_z \quad , \quad \beta \quad \pi/2 \quad (17)$$

由于这时, 涡度的发展是由于质块沿倾斜等熵面下滑所致, 故可谓之下滑“倾斜涡度发展”(SVD)。另一方面, 当等熵面接近水平时,

$$\xi_z \quad \xi_n, \quad \beta \quad 0$$

只有在这种场合, Rossby 位涡和 IPV 才守恒。

根据式(6) 和式(8) 还可得到垂直涡度变化和 SVD 相联系的方程如下:

$$\frac{D\xi_z}{Dt} + \beta v + (f + \zeta) \cdot V = \frac{1}{\alpha} \frac{D}{Dt} \left[\frac{P_E}{\Theta} - C_D \right], \quad \Theta \quad 0 \quad (18)$$

式(18) 实际上是“全型垂直涡度方程”式(9) 的另一种表述形态。由此得到在绝热无摩擦的场合, SVD 的充分必要条件为

$$C_D(t + \Delta t) - C_D(t) < P_E \left[\frac{1}{\Theta(t + \Delta t)} - \frac{1}{\Theta(t)} \right] \quad (19)$$

在图2 所示的例子中, 式(19) 右端为正。由于起始时刻在 A_0 处 $C_D = 0$ (因为 $\theta_s = 0$), 因此在 A 处 C_D 为负将有涡度发展。换言之, 在本场合式(15) 是 SVD 的充分条件。还由于当 θ

面十分陡立时式(18)右端趋于无穷, 因此涡度发展将变得十分剧烈。

在中纬度地区, 对流层中低层的 θ 面呈倾斜分布。那里应是 SVD 的常发区, 对应着温带锋面气旋的发展。夏季青藏高原东侧 θ 面通常十分陡峭。SVD 的发展可以非常迅猛, 导致低涡的剧烈发展。为检验 SVD 对涡度发展的贡献, 在下一节中将利用一个绝热等 θ 坐标模式, 分析沿等熵面下滑的空气质点在满足充分条件式(15)时, 对一次西南低涡形成的贡献。

5 一次西南低涡形成的数值模拟

1981 年 7 月 11~15 日, 四川省境内发生特大暴雨。雨量集中在 12~14 日, 降水中心总雨量超过 366 mm, 损失严重, 引起大气界的关注。许多科学家(如周晓平和胡信芳^[4], 1984; Hovermale^[5], 1984; Anthes 和 Heagenson^[6], 1984; 陈受钧和 Dell'Oso^[7], 1984; 以及郭英华等^[8], 1986) 对此次过程进行了分析和模拟试验。共同的结论是这次特大暴雨是由于一个 α -尺度的西南低涡的迅猛发展引起的。在 1981 年 7 月 11 日 12Z 的天气图上, 青藏高原东南部出现气旋式环流。它在 7 月 12 日移到四川盆地发展成为低涡, 中心位于 28° N, 104° E。与此同时, 高原东北侧有一中纬槽东移发展。12 日在高原东部形成“北槽南涡”的形势, 四川地区的大暴雨开始出现。

尽管西南低涡的发展与水汽凝结潜热的释放有关, 但吴国雄和陈受钧^[9] (1985) 的研究表明, 其形成的主要原因是由高原的机械强迫作用所致。因此, 可以使用 Bleck (1984)^[10] 的绝热模式来模拟该低涡的形成。该模式用 θ 面作为垂直坐标, 在垂直方向从 305 K 到 365 K, 以 5 K 为间隔共有 13 层。水平格距为 80 km。时间步长为 60 s。其基本方程由动量方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta} u - f v = - \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{\theta} + F_x \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{\theta} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta} v - f u = - \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_{\theta} + F_y \quad (21)$$

连续方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta} \left(\mathbf{V} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (22)$$

热力方程

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0 \quad (23)$$

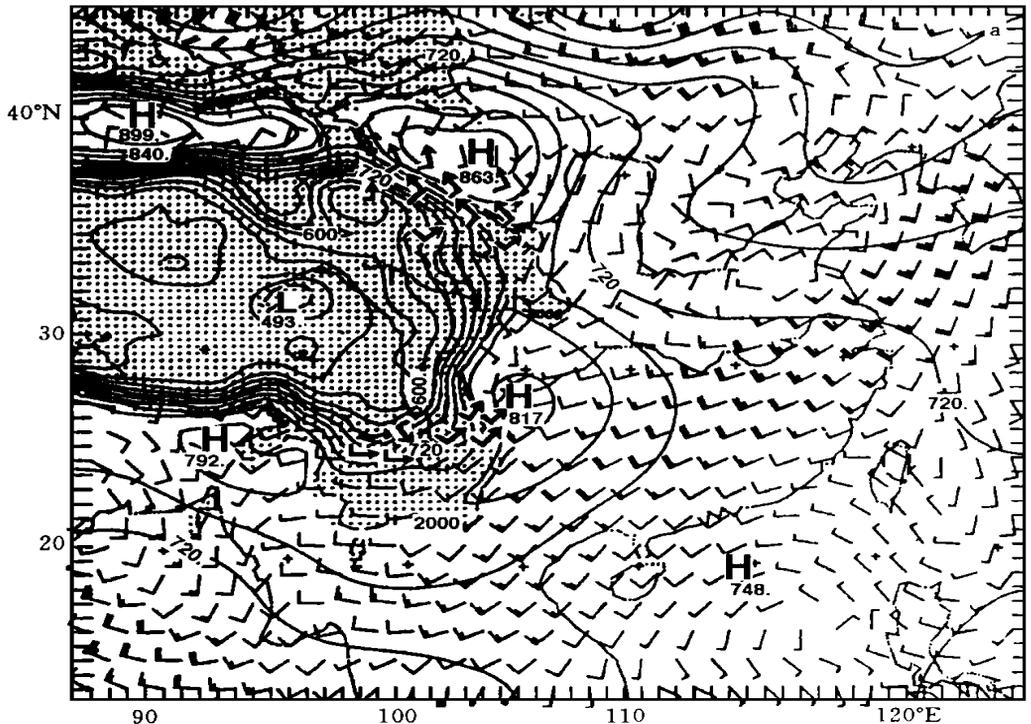
以及静力方程

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = \pi \quad (24)$$

构成。式(20), (21)中 F_x 和 F_y 分别为 x 和 y 方向的摩擦力; $M = \Phi + c_p T$ 为蒙哥马利函数; $\pi = c_p \left(\frac{P}{P_0} \right)^{R/c_p}$ 为 Exner 函数。每一变量在每一时间步长的边界条件是由初始时刻和

终了时刻该量的观测值线性内插得到的。模式的细节,尤其是对低边界的处理可参阅文献[10]。赵宇澄和吴国雄等^[11](1995)对该模式引进了中国的地形分布,选择1981年7月11日00Z的气象场作为初始场,共积分60h,其前24h的积分即准确地模拟出低涡的形成。这里将利用这一积分结果来说明SVD是如何导致“北槽南涡”形势的形成。由于四川盆地在该低涡形成前后, $\theta = 315\text{ K}$ 接近750 hPa(见图4和图5),刚好通过该低涡的上部。下面将对这个 θ 面上各种变量的分布进行分析。

图3是1981年7月11日00Z $\theta = 315\text{ K}$ 面上起始场的分布。最为显著的特征是该面在高原上空高高抬起,最高点达493 hPa的高度(图3a);而在高原周围迅速下垂,在四川盆地和戈壁沙漠分别低达817 hPa和863 hPa。由于模式是绝热的,起始时位于该面上的气块在其后的运动中也必将位于该面上。由于该面在高原周围陡立下倾,该面上由低气压区指向高压区而横越高原边缘的风速将沿着该陡立 θ 面下滑。在图3—图5中,这些下滑风被加粗的、带有箭头和风羽的矢量表示。在起始场中,沿高原东侧 $\xi_n = \alpha(f + \xi_n)$ 为正(见图3b), θ 也为正,那里的大气是对称稳定的,即 $P_E > 0$ 。根据 θ 的分布, θ 的水平梯度(θ)的方向 S 从高原指向外部。由于高原东侧的偏南风在近地层随高度增加而增加(文献[4]),那里风的垂直切变 $\xi_s \left(= \frac{\partial V_m}{\partial z} \right)$ 与 θ 反向,因此热力因子 $C_D = \xi_s \theta / \theta$ 为负值。这意味着高原东侧的起始场满足SVD的充分条件(15),有利于该处垂直涡度发展。图3b为该面上起始场相对涡度的分布。由于相邻 θ 面上 ζ 的分布与图3b相似(图略),把 ξ_s 内插到其间的等压面将不影响涡度分布的总体特征。为简单起见,将用该 θ 面上的涡度分布去透视相邻等压面上或等高面上的涡度分布。



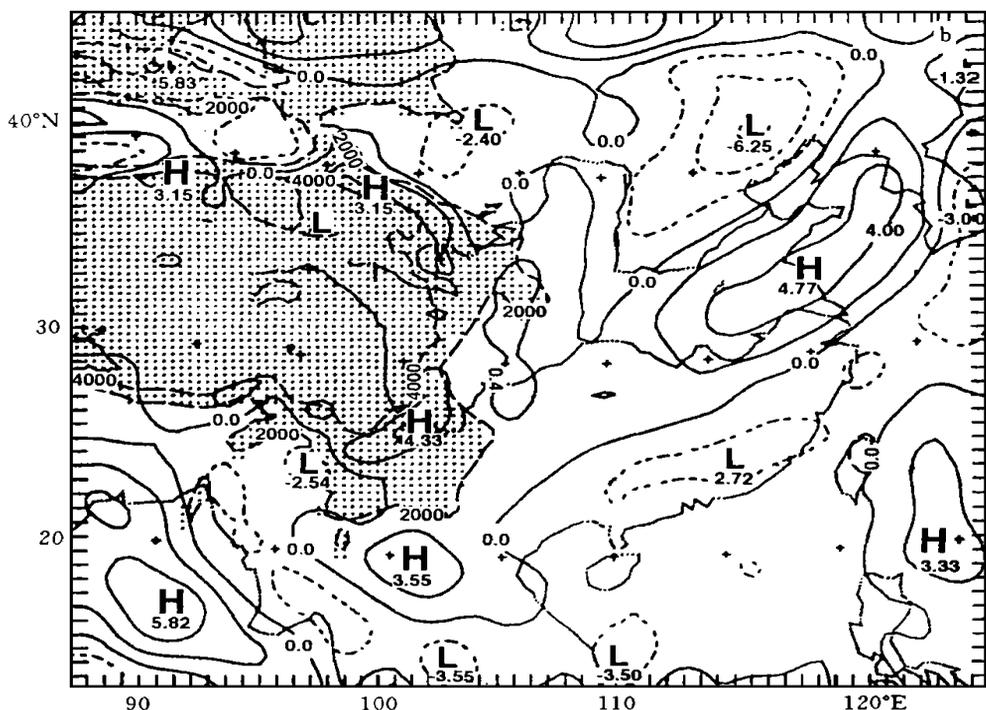


图3 1981年7月11日00Z $\theta = 315$ K 面上等压线、风速和垂直涡度的分布

(a. 等压线间隔: 30 hPa, 风羽的每一横线为 4 ms^{-1} , 带有箭头的

加粗风羽表明那里风沿着陡斜的 θ 面下滑; b. 垂直涡度间隔: $2.00 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$)

图3b上出现两个正涡度中心。一个在高原东北侧, 强度为 $3.15 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; 一个在高原东南侧, 强度为 $4.33 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。前者与东移的中纬西风槽相联系; 后者与即将生成的气旋性涡旋有关。两者均出现在风沿陡立 θ 面下滑的区域(图3a)。在该图上, 在华东, 渤海, 西太平洋, 中南半岛和孟加拉湾也有正涡度中心。它们与特定的天气系统相联系。由于这些中心出现在 θ 面相对平坦的区域, 与本文主题无关, 这里不分析其演变, 只集中考察高原东侧上述两涡度中心的发展。

12小时后(图4), $\theta = 315$ K 面上的气压分布(图4a)变化不大。但四川盆地上空的“暖漏斗”从 817 hPa 下降至 842 hPa。与起始场比较发现, 高原东北侧和东南侧的下滑运动显著加强。下滑区扩展, 风速加强, 风矢更垂直于等压线。高原东南侧的下滑区一分为二。西面一支在 98°E 附近; 东面一支下滑前锋已达四川盆地。与迅速加强的下滑运动相对应, 垂直涡度在此期间急速发展(图4b)。高原东北侧的正涡度区扩大东移, 强度达 $6.46 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, 比起始场强一倍以上。高原东南侧涡度发展更为迅猛。它分为两个中心: 西侧中心强度达 $8.42 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, 近于加倍; 东侧的中心也达 $4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 以上, 并开始进入四川盆地。在此时刻, 西南低涡实际上已生成, 只不过只有一部分中心出现在四川盆地而已。

到7月12日00Z, $\theta = 315$ K 面上环绕高原的气压场分布仍大致相似(图5a)。四川上

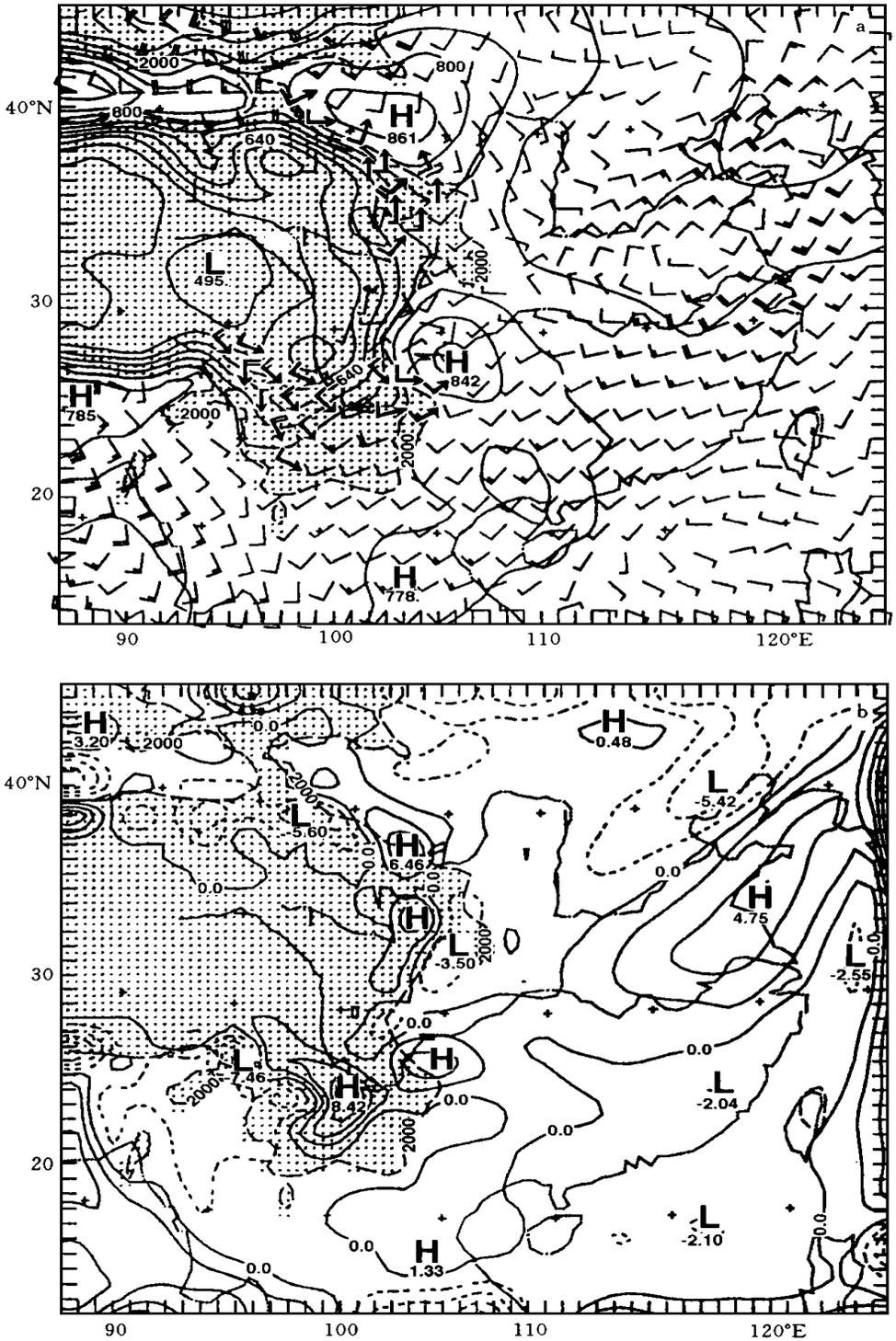


图4 1981年7月11日12Z $\theta = 315$ K面等压线、风速和垂直涡度分布

(a. 等压线间隔: 40 hPa; b. 垂直涡度间隔: $2.00 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$)

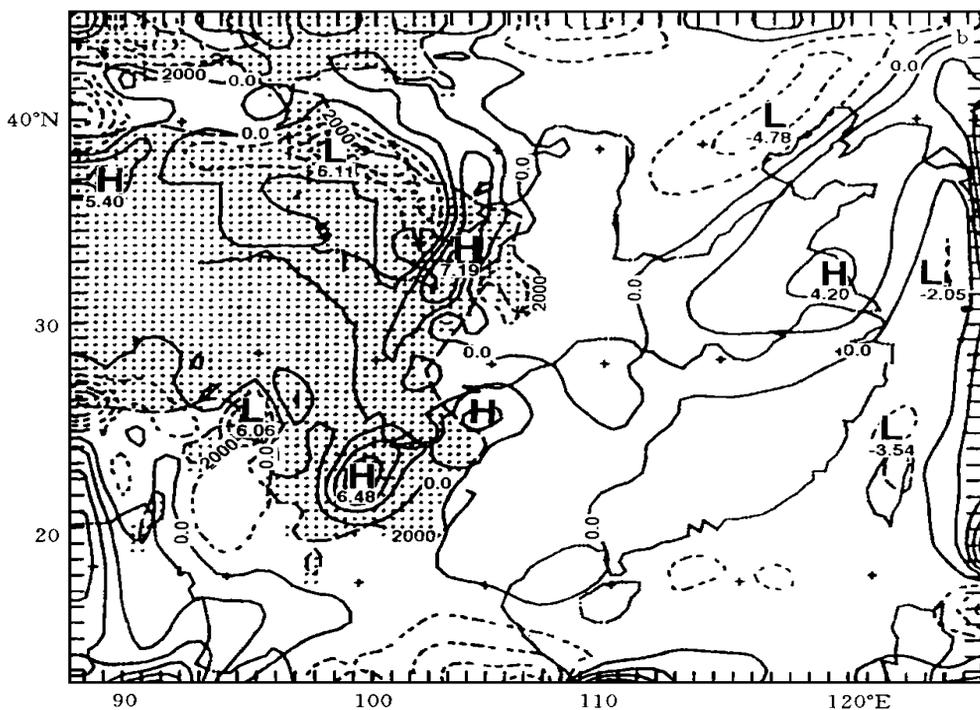
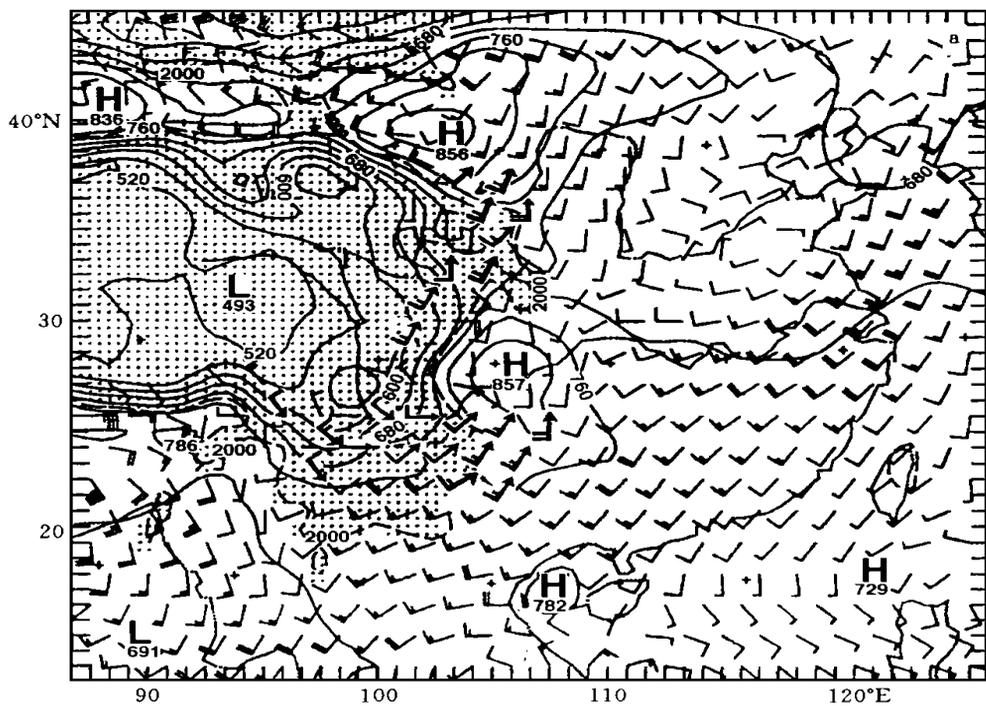


图5 1981年7月12日00Z $\theta = 315$ K面等压线、风速和垂直涡度分布

(a. 等压线间隔: 40 hPa; b. 垂直涡度间隔: $2.00 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$)

空的暖漏斗缓慢东移,继续向下伸展达 857 hPa。高原东侧的下滑区也加强东移。北面增强的下滑气流使中纬槽进一步加深,垂直涡度强达 $7.19 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (图 5b)。在南面,原位于西侧 98 E 附近的下滑气流减弱,使 100 E 附近的涡度中心也减弱。在东侧,虽然 θ 面的倾斜在南面减弱,但那里的从横断山脉下滑的西南风大大加强。这使西南低涡的强度变化不大。再者,暖漏斗的东移及下滑气流的加强导致西南低涡也东移,低涡的整个中心已出现在四川盆地。至此,完整的西南低涡已可观测到。新生的低涡中心位于(28 N, 104 E),刚好与观测到的低涡中心的位置重合。上述分析表明, Bleck 模式能很好地模拟该西南低涡的形成和中纬西风槽的加深;该西南低涡的形成则可用下滑 SVD 理论加以解释。质块在高原东北侧和东南侧沿着等 θ 面绝热下滑而诱发垂直涡度发展的过程与图 2 所描述的一致,使“北槽”和“南涡”的垂直涡度在 12 小时内的增加分别达到 3.11 和 $4.09 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。

以往,人们常用过山气流沿着山脉下沉引起气柱垂直伸展来解释低涡的生成(如文献 [9]和[11])。对此,利用式(9)和连续方程将涡度方程中的垂直延展项准确地写成

$$\frac{D\zeta}{Dt} - (f + \zeta) \frac{1}{\alpha} \frac{D\alpha}{Dt} = 1 - \kappa(f + \zeta) \frac{\omega}{p}$$

取 $p = 700 \text{ hPa}$, $\omega = 1 \times 10^{-3} \text{ hPa s}^{-1}$, $Q = 30 \text{ N}$, 以及 $\Delta t = 0.5 \text{ d}$, 那么下沉气柱由于密度压缩所诱发的涡度增长的值应是 $\Delta\zeta = 0.5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 。这对于所研究的西南低涡的发展 ($\sim 5 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$) 来说是太弱了。由此看来, SVD 应当是该西南低涡形成的主要机制。

6 讨论和结论

本文从三维位涡方程出发,导得全型垂直涡度倾向方程式(9)。它不仅包括动力因子的影响,还包括热力因子的作用。容易证明这一方程与传统的涡度倾向方程明显不同,而后者只是前者的特例。其实,用 k 去点乘第 1 节中的三维涡度方程便可得到如下的传统的垂直涡度倾向方程

$$\begin{aligned} \frac{D\zeta}{Dt} + \beta v + (f + \zeta) \cdot \nabla \cdot \mathbf{V} \\ = (f + \zeta) \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + N_z + k \cdot \mathbf{F}_\zeta \end{aligned} \quad (25)$$

式中 N_z 为垂直力管项。与式(9)比较发现,全型涡度方程中许多与水平量有关的项(如水平摩擦力项,水平涡度变化项和水平温度梯度变化项),温度层结变化项和非均匀加热项等均不出现在式(25)中。这是由于式(25)一开始就只取三维涡度方程的垂直分量的缘故。例如,容易证明,当 θ 面为平面时,式(9)便完全和式(25)等同(见附录)。

当 θ 面出现倾斜时,由于上述许多项不出现,再应用式(25)去研究涡度发展就有局限性了。这时,应用本文导得的全型垂直涡度倾斜方程就可得到完善的结果。在这种场合,就如外切平面定理所描述的那样,水平涡度的合适分布($C_D < 0$)可诱发垂直涡度强烈发展。由于这种涡度发展以 θ 面的倾斜为前提,为与式(25)的含义相区别,这里称此类涡度发展为倾斜涡度发展(SVD)。数值模拟表明,当 θ 面非常陡立时, SVD 发展可以十分急

剧, 比辐合项引起的涡度发展大一个量级以上。因此, SVD 是急剧天气发展的一种重要机制。

通过比较式(9)和式(18), 还证明了一个重要关系, 即在诱发 SVD 的过程中, 风垂直切变, 稳定度和斜压性的影响不是孤立的。三者必须结合成一个热力学参数 $C_D = \theta_{\xi_s} / \theta_s$ 加以考虑。由此制作了一些等熵面和等压面上的 C_D 分布图, 结果发现其天气指示意义非常明显, 冷锋的移动和气旋涡度的发展常有负值 C_D 带相伴随。这些分析研究结果将有待今后陆续发表。

参考文献

- 1 Ertel H. Ein neuer hydrodynamische wirbelsatz. Meteorology. Zeitschr. Braunschweigs. 1942, 59: 277- 281
- 2 吴国雄, 蔡雅萍, 唐晓菁. 湿位涡和倾斜涡度发展. 气象学报, 1995, 53(4): 387-405
- 3 Hoskins B J, McIntyre M E and Robertson A W. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. Quart J Roy Meteor Soc, 1985, 111, 877- 946
- 4 Zhou X P, Hu X F. A brief analysis and numerical simulation of the Sichuan extra ordinary heavy rainfall event. Proc. First Sino American Workshop on Mountain Meteorology. The Chinese Academy of Sciences and the U. S. National Academy of Sciences, Beijing, Amer Meteor Soc, 1984. 555- 565
- 5 Hovermale J B. Numerical experiments with the Sichuan flooding catastrophe (11- 15 July, 1981). Proc. First Sino American Workshop on Mountain Meteorology. The Chinese Academy of Sciences and the U. S. National Academy of Sciences, Beijing, Amer Meteor Soc, 1984. 243- 264
- 6 Anthes R A and Heagerson P L. A comparative numerical simulation of the Sichuan flooding catastrophe (11- 15 July, 1981). Ibid. 1984, 519- 524
- 7 Chen S J and Dell'Osso L. Numerical prediction of the heavy rainfall vortex over the eastern Asian monsoon region. J Meteor Soc Japan, 1984, 62, 730- 747
- 8 Kuo Y H, Cheng L S and Anthes R A. Mesoscale analysis of Sichuan flood catastrophe, 11- 15 July, 1981, Mon Wea Rev, 1986, 114, 1984- 2003
- 9 Wu G X and Chen S J. The effect of mechanical forcing on the formation of a mesoscale vortex. Quart J Roy Meteor Soc, 1985, 111, 1049- 1070
- 10 Bleck R. An isentropic model suitable for lee cyclogenesis simulation. Riv Meteor Aeronaut, 1984, 43, 189- 194
- 11 赵宇澄, 吴国雄, 纪立人, 刘辉. 用等熵模式对一次西南低涡过程的模拟和等熵位涡分析. 台风、暴雨数值预报新技术的研究. 北京: 气象出版社, 1996. 94 ~ 102

COMPLETE FORM OF VERTICAL VORTICITY TENDENCY EQUATION AND SLANTWISE VORTICITY DEVELOPMENT

Wu Guoxiong

*(State Key Lab of Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics(LASG)
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)*

Liu Huanzhu

(National Meteorological Center, China Meteorological Administration, Beijing, 100081)

Abstract

In this study, a complete form of vertical vorticity tendency equation was deduced from the Ertel potential vorticity theory. It includes not only dynamic elements, but also thermodynamic elements, frictional dissipation and diabatic heating, and is applicable to three dimensional motion. It was proved that the classical vertical vorticity equation which is appropriate only for horizontal motion is merely a special case of this newly obtained complete form equation. Based upon this equation, the theory of Slantwise Vorticity Development (SVD) proposed by Wu et al. was also proved. According to this theory, when a parcel slides down a slantwise isentropic surface and the thermal parameter C_D is decreasing, its vertical vorticity develops. To verify the theory, a θ coordinate model was employed to simulate the formation of a "southwest vortex" near the Tibetan Plateau. Results show that the vertical vorticity development due to SVD is about an order of magnitude stronger than that due to convergence which has been traditionally emphasised.

Key words: Ertel potential vorticity, Box law, Circumscribed plane law, Thermal parameter C_D .

附录

θ 为水平面时传统涡度方程和全型涡度方程的等价性
记传统涡度方程为

$$\begin{aligned} F_1(\zeta) &= \frac{D\zeta}{Dt} + \beta v + (f + \zeta) \cdot V \\ &= (f + \zeta) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + N_z + k F_\zeta \end{aligned} \quad (1)$$

全型涡度方程为

$$\begin{aligned} F_2(\zeta) &= \frac{D\zeta}{Dt} + \beta v + (f + \zeta) \cdot V \\ &= -\frac{1}{\alpha\theta_z} \left[(P_E - \xi_s \theta) \frac{D\theta}{Dt} + \theta \xi_s \frac{D\theta_s}{Dt} + \theta \theta \frac{D\xi_s}{Dt} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\theta_z} \cdot \theta F_\zeta + \frac{1}{\theta} \zeta \cdot Q, \quad \theta_z = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

当 θ 面为水平时, 由于力管方向平行于 θ 面, 这时垂直力管 N_z 为零, 于是

$$F_1(\zeta) = (f + \zeta) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + k F_\zeta \quad (3)$$

又由于 $\theta_z = 0$, 因此式(2)可写为

$$\begin{aligned} F_2(\zeta) &= \left[-\frac{\xi_s}{\alpha\theta} \frac{D\theta}{Dt} + \frac{\zeta}{\theta_z} \frac{\partial Q}{\partial x} \right] + \left[-\frac{\xi_s}{\alpha\theta} \frac{D\theta_s}{Dt} + \frac{\zeta}{\theta_z} \frac{\partial Q}{\partial s} \right] + k F_\zeta \\ &= \frac{(f + \zeta)}{\theta_z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{D\theta}{Dt} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \theta_z \right] + \frac{\zeta}{\theta_z} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(Q - \frac{D\theta}{Dt} \right) + \frac{\partial v}{\partial s} \theta_z \right] + k F_\zeta \\ &\quad \theta_z = 0 \end{aligned}$$

利用热力学方程, 得

$$F_2(\zeta) = (f + \zeta) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + k F_\zeta \quad (4)$$

比较式(3)和(4), 于是有

$$F_1(\zeta) = F_2(\zeta) \quad (5)$$

证毕。