

大气静力稳定度的铅直分布和不同风速铅直廓线对天气系统发展的影响*

萧 永 生

(安徽省气象科学研究所)

提 要

采用一个准地转三层模式, 对于高低空不同层结及不同风速铅直廓线下的斜压不稳定性问题进行了分析和讨论。指出: (1) 大气层结特征对斜压不稳定的影响不仅表现在对不稳定临界波长和临界风速切变的制约上, 而且其铅直分布的不均一性决定了大气的各个层次对斜压不稳定的贡献大小; 扰动的斜压发展主要取决于静力稳定度较小的那些层次内的热力、动力学条件, 在这些层次内, 扰动也最为明显。(2) 高低空风速比中空为大的“高低空强风型”风速铅直分布最有利于扰动的不稳定发展, 在这种风速铅直廓线下, 不稳定波波谱较宽, 不稳定波临界波长和最不稳定波波长也较短。

一、引 言

众所周知, 大气的斜压不稳定性是中纬天气系统发展的主要机制。但在经典的研究中, 一般都设基本气流随高度线性分布, 且层结是上下一致的^[1,2]。近年来, 郭晓岚等对急流型下的斜压不稳定性问题作了比较深入的研究, 但他主要讨论的是对流层顶至平流层的急流(他所设急流高度均位于 12.5 km 以上)^[3], 对和天气变化密切相关的对流层中的急流并未涉及。然而, 大量的天气分析事实表明, 对流层中的急流, 特别是低空急流对于天气系统的发生发展起着重要的作用。天气分析事实还表明, 梅雨期间, 低空暖湿, 层结近于中性而高空较为稳定, 在此期间, 频繁地活动着江淮气旋、西南涡等各种天气尺度或次天气尺度的浅薄低空扰动。对于它们虽然已有过不少研究, 但动力学机制的分析还较少, 本文针对上述问题, 设计了一个比较简单的准地转三层模式, 进行了一些分析和探讨。

二、基 本 方 程

由于仅仅讨论斜压不稳定, 所以和大多数研究者一样, 我们不计侧向切变, 设基本气

* 本文于 1982 年 5 月 14 日收到, 1983 年 6 月 24 日收到修改稿。

流 \bar{u} 只是 p 的函数, 即 $\bar{u} = \bar{u}(p)$ 。

不计摩擦的准地转涡度方程和绝热的热力学方程在 p 坐标中可以写成: [1]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \vec{v}_* \cdot \nabla (\nabla^2 \psi + f) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \vec{v}_* \cdot \nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \frac{\alpha}{f_0} \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里 ψ 为流函数。

$$\vec{v}_* = \vec{K} \wedge \nabla \psi \quad (2)$$

σ 为静力稳定度参数 $\sigma = -\frac{\alpha}{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right) \quad (3)$

对于未饱和大气 $\sigma = \sigma_d = -\frac{\alpha}{\theta_d} \left(\frac{\partial \theta_d}{\partial p} \right) \left. \vphantom{\sigma = \sigma_d} \right\}$

对于饱和大气 $\sigma = \sigma_w = -\frac{\alpha}{\theta_{se}} \left(\frac{\partial \theta_{se}}{\partial p} \right) \quad (4)$

f 为科氏参数, $\omega = \frac{dp}{dt}$ 为垂直速度。

假定流场由基本场和扰动场组成:

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \omega = \omega' \quad (5)$$

且 $\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= -\bar{u}(p)y \\ \psi' &= \psi'(x, p, t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$

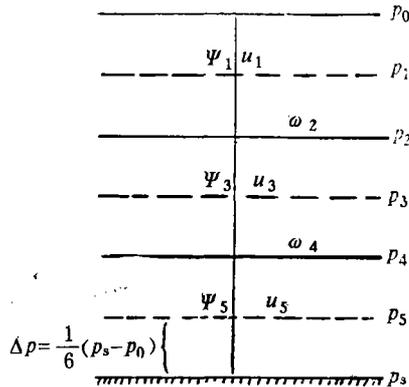


图 1 三层准地转模式垂直分层

把(5)、(6)式代入(1)式, 可以得到关于扰动量 ψ', ω' 的微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(p) \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega'}{\partial p} &= 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}(p) \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial \psi'}{\partial p} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial p} \frac{\partial \psi'}{\partial x} + \frac{\sigma}{f_0} \omega' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

为了模拟风速的非线性铅直廓线和大气层结的铅直差异, 我们使用一个三层模式(图 1), 把大气划分为六层。涡度方程写在 1, 3, 5 层上, 热流量方程写在 2, 4 层上。用中央差分代替对 p 的微分, 即令 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_j = \frac{1}{2 \Delta p} (\phi_{j+1} - \phi_{j-1})$, 这里 j 为层号, ϕ 为任一函数。并设

$$\omega_0 = \omega_6 = 0, \bar{u}_2 = \frac{1}{2} (\bar{u}_1 + \bar{u}_3), \bar{u}_4 = \frac{1}{2} (\bar{u}_3 + \bar{u}_5) \quad (8)$$

则(7)式成为: $\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial x^2} - f_0 \frac{\omega_2^1}{2 \Delta p} + \beta \frac{\partial \psi_1^1}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_3^1}{\partial x^2} - f_0 \frac{\omega_4^1 - \omega_2^1}{2 \Delta p} + \beta \frac{\partial \psi_3^1}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_5 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi_5^1}{\partial x^2} + f_0 \frac{\omega_4^1}{2 \Delta p} + \beta \frac{\partial \psi_5^1}{\partial x} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_3^1 - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_1^1 + \frac{2 \Delta p \sigma_2}{f_0} \omega_2^1 &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_5^1 - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_5 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_3^1 + \frac{2 \Delta p \sigma_4}{f_0} \omega_4^1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$

$$\text{令} \quad \mu_j^2 = f_0^2/4(\Delta p)^2\sigma_j, \quad j=2,4. \quad (10)$$

利用(10)式并消去(9)式中的 ω_j ($j=2,4$) 可得:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi_1^1 + \mu_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_3^1 = 0 \\ & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_4^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_5 \frac{\partial}{\partial x} \right) - \mu_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi_3^1 + \\ & + \mu_4^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_5^1 + \mu_2^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_1^1 = 0 \\ & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_5 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_4^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \psi_5^1 + \mu_4^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_5 \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_3^1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{设 } \psi_j^1 \text{ 有波动解} \quad \psi_j^1 = \hat{\psi}_j e^{i(Rx - ct)} \quad j=1,3,5. \quad (12)$$

(12) 式代入(11)式, 得到 $\hat{\psi}_j$ 所满足的方程为:

$$\left. \begin{aligned} & [K^2(c - \bar{u}_1) + \mu_2^2(c - \bar{u}_3) + \beta] \hat{\psi}_1 - \mu_2^2(c - \bar{u}_1) \hat{\psi}_3 = 0 \\ & -\mu_2^2(c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_1 + [K^2(c - \bar{u}_3) + \mu_4^2(c - \bar{u}_5) + \mu_2^2(c - \bar{u}_1) + \beta] \hat{\psi}_3 - \\ & -\mu_4^2(c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_5 = 0 \\ & -\mu_4^2(c - \bar{u}_5) \hat{\psi}_3 + [K^2(c - \bar{u}_5) + \mu_4^2(c - \bar{u}_3) + \beta] \hat{\psi}_5 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(13) 式为 $\hat{\psi}_j$ 的齐次方程组, 存在非零解的充要条件为:

$$\left| \begin{array}{ccc} K^2(c - \bar{u}_1) + \mu_2^2(c - \bar{u}_3) + \beta & -\mu_2^2(c - \bar{u}_1) & 0 \\ -\mu_2^2(c - \bar{u}_3) & K^2(c - \bar{u}_3) + \mu_4^2(c - \bar{u}_5) + \mu_2^2(c - \bar{u}_1) + \beta & -\mu_4^2(c - \bar{u}_3) \\ 0 & -\mu_4^2(c - \bar{u}_5) & K^2(c - \bar{u}_5) + \mu_4^2(c - \bar{u}_3) + \beta \end{array} \right| = 0 \quad (14)$$

展开上式即可得到关于 c 的特征方程。

三、大气静力稳定度的铅直分布对斜压不稳定性的影响

$$\text{由(10)式,} \quad \mu_j^2 \alpha \frac{1}{\sigma_j} \alpha - \left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right)_j^{-1} \quad (15)$$

当大气层结越稳定时, μ_j^2 越小, 而当大气为弱稳定层结时, μ_j^2 较大。

方程组(13)中第二式可以改写成:

$$\mu_2^2[(c - \bar{u}_1) \hat{\psi}_3 - (c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_1] + \mu_4^2[(c - \bar{u}_5) \hat{\psi}_3 - (c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_5] + [K^2(c - \bar{u}_3) + \beta] \hat{\psi}_3 = 0 \quad (16)$$

$$\text{由于} \quad O([(c - \bar{u}_1) \hat{\psi}_3 - (c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_1]) = O([(c - \bar{u}_5) \hat{\psi}_3 - (c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_5]) \ll U\Psi \quad (17)$$

其中 U, Ψ 分别为 c, \bar{u} 及 $\hat{\psi}$ 的特征尺度。

当大气层结垂直差异显著时 (例如, 大气下层为近于饱和的弱稳定层结, 大气上层为稳定层结), 可以有 $\mu_4^2 \gg \mu_2^2$ 。此时, 由(17)式可以看出: (16)式中含 μ_2^2 项与 μ_4^2 项相比为一小项, 可以略去, 于是(16)式成为:

$$[K^2(c - \bar{u}_3) + \mu_4^2(c - \bar{u}_5) + \beta] \hat{\psi}_3 - \mu_4^2(c - \bar{u}_3) \hat{\psi}_5 = 0 \quad (18)$$

以(18)式代替方程组(13)中的第二式, 得到:

$$\left. \begin{aligned} [K^2(c-\bar{u}_1) + \mu_2^2(c-\bar{u}_3) + \beta]\hat{\psi}_1 - \mu_2^2(c-\bar{u}_1)\hat{\psi}_3 &= 0 \\ [K^2(c-\bar{u}_3) + \mu_4^2(c-\bar{u}_5) + \beta]\hat{\psi}_3 - \mu_4^2(c-\bar{u}_3)\hat{\psi}_5 &= 0 \\ [K^2(c-\bar{u}_5) + \mu_4^2(c-\bar{u}_3) + \beta]\hat{\psi}_5 - \mu_4^2(c-\bar{u}_5)\hat{\psi}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

方程组(19)存在非零解的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} K^2(c-\bar{u}_1) + \mu_2^2(c-\bar{u}_3) + \beta & -\mu_2^2(c-\bar{u}_1) & 0 \\ 0 & K^2(c-\bar{u}_3) + \mu_4^2(c-\bar{u}_5) + \beta & -\mu_4^2(c-\bar{u}_3) \\ 0 & -\mu_4^2(c-\bar{u}_5) & K^2(c-\bar{u}_5) + \mu_4^2(c-\bar{u}_3) + \beta \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{展开得: } [K^2(c-\bar{u}_1) + \mu_2^2(c-\bar{u}_3) + \beta] \{ [K^2(c-\bar{u}_3) + \mu_4^2(c-\bar{u}_5) + \beta] \times \\ \times [K^2(c-\bar{u}_5) + \mu_4^2(c-\bar{u}_3) + \beta] - \mu_4^2(c-\bar{u}_5)(c-\bar{u}_3) \} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

(21)式是一个关于 c 的三次方程,对于波动的稳定性问题,我们主要关心的是它是否有着导致不稳定增长的复根。这可由(21)式,考察二次方程(22)式决定:

$$\begin{aligned} K^2(K^2 + 2\mu_4^2)c^2 + [K^2(K^2 + 2\mu_4^2)(\bar{u}_3 + \bar{u}_5) - 2\beta(K^2 + \mu_4^2)]c + \\ + [K^2\bar{u}_3\bar{u}_5 + K^2\mu_4^2(\bar{u}_3^2 + \bar{u}_5^2) - \beta(K^2 + \mu_4^2)(\bar{u}_3 + \bar{u}_5) + \beta^2] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

两个复根为:

$$c_{1,2} = \frac{\bar{u}_3 + \bar{u}_5}{2} - \frac{\beta(\mu_4^2 + K^2)}{K^2(2\mu_4^2 + K^2)} \pm \sqrt{\frac{\beta^2\mu_4^4}{K^4(2\mu_4^2 + K^2)^2} - \frac{2\mu_4^2 - K^2}{2\mu_4^2 + K^2} \left(\frac{\bar{u}_5 - \bar{u}_3}{2} \right)^2} \quad (23)$$

这两个根与一般两层模式中的相速公式完全相同^[4],由此求得波动不稳定的必要条件为:

$$K^2 < 2\mu_4^2, \text{ 最不稳定波波数 } K_i^2 = \sqrt{2\mu_4^2}, \text{ 最小临界风速切变 } \left| \frac{\bar{u}_5 - \bar{u}_3}{2} \right|_{\text{minc}} = \frac{\beta}{2\mu_4^2} \quad (24)$$

由方程组(19)还可以解出 $\hat{\psi}_5, \hat{\psi}_1$ 。它们分别为:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \frac{\mu_2^2(c-\bar{u}_1)}{K^2(c-\bar{u}_1) + \mu_2^2(c-\bar{u}_3) + \beta} \hat{\psi}_3 \\ \hat{\psi}_5 &= \frac{\mu_4^2(c-\bar{u}_5)}{K^2(c-\bar{u}_5) + \mu_4^2(c-\bar{u}_3) + \beta} \hat{\psi}_3 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\text{由上式还可得} \quad \hat{\psi}_1/\hat{\psi}_5 \propto \mu_2^2/\mu_4^2 \quad (26)$$

$$\text{对于} \quad \mu_2^2 \ll \mu_4^2, \text{ 则有 } |\hat{\psi}_1| \ll |\hat{\psi}_5| \quad (27)$$

同理,当 $\mu_2^2 \gg \mu_4^2$ 时,可以得到完全类似于(23)~(27)的结果,只是把 μ_4^2 与 μ_2^2 互换而已。

注意到当 $\mu_4^2 \gg \mu_2^2$ 时,(23)式中不涉及 \bar{u}_1 和 μ_2^2 。也就是说扰动的稳定性和大气的上层条件无关。因此,(23)~(27)式说明:在大气高低空层结差异很大时,斜压不稳定的产生主要取决于静力稳定度较小的层次中的层结参数和风速铅直切变。同时,扰动的振幅在该层次中比静力稳定度较大的层次要显著得多。对于 $\mu_4^2 \gg \mu_2^2$ 这种层结铅直分布而言,

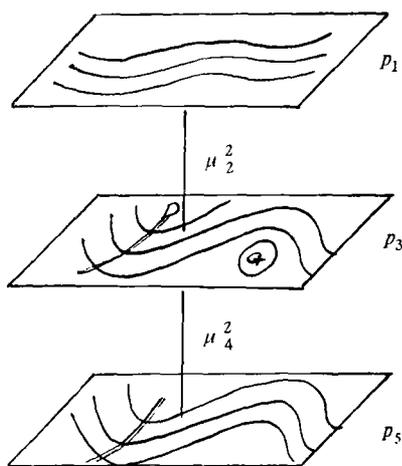


图 2 当 $\mu_4^2 \gg \mu_2^2$ 时，不稳定扰动的垂直结构

不稳定扰动的发展主要取决于低空的热力、动力条件。并且扰动在低空比高空更为明显。初夏梅雨期江淮流域低空暖湿，层结近于湿中性层结，而高空干燥，较为稳定，层结铅直分布常可形成 $\mu_4^2 \gg \mu_2^2$ 。因此，初夏江淮流域常常形成较为浅薄的低空扰动，并且由 (24) 式，当 μ_4^2 很大时，最不稳定波的波长变短。临界风速切变也变小，容易形成波长较短的次天气尺度系统(图 2)

综上所述，初夏江淮流域经常产生的次天气尺度的浅薄低空扰动是与这时的特定的大气层结状况密切相关的。这一点，谢义炳教授也曾指出过^[5]。

上述分析给我们以这样的启示，初夏梅雨期的天气形势分析和预报应特别着重于低空各等压面上的形势演变，相比之下，高空的影响较为次要。

四、不同风速铅直廓线下的斜压不稳定性

在关于斜压不稳定的经典研究中，采用两层模式并利用了关系式 $\bar{u}_2 = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 + \bar{u}_3)$ ^[1]，这个关系式仅在风速随高度线性变化时才是严格正确的，（该式的成立隐含了条件 $u = sp + u_0$, $s = \frac{\partial u}{\partial p} = \text{constant}$ ）我们把这种风速铅直廓线称之为“线性型”。同样，在三层模式中，我们利用了公式(8)： $\bar{u}_2 = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 + \bar{u}_3)$, $\bar{u}_4 = \frac{1}{2}(\bar{u}_3 + \bar{u}_5)$ ，这仅仅在 p_1-p_3 层内及 p_3-p_5 层内风速分别随高度呈线性变化时才是严格正确的，但上下层风速随高度的变化趋势既可相同，也可相反。

令 p_1-p_3 层内及 p_3-p_5 层内风速铅直分布分别为：

$$\bar{u}_\pm = A(p - p_3) + \bar{u}_3 \quad \text{及} \quad \bar{u}_\mp = B(p - p_3) + \bar{u}_3 \quad (28)$$

其中 A, B 分别为 p_1-p_3 层及 p_3-p_5 层中的风速铅直切变。

则当 $A = B$ 时， p_1-p_5 层间的风速铅直廓线为一直线(图 3 a)，亦即“线性型”，该型下的斜压不稳定性问题，我们仍沿用经典两层模式的结论，不作进一步讨论。

当 $A \neq B$ 时， p_1-p_5 层间的风速铅直廓线呈一折线，这种折线形的风速廓线，可以近似模拟实际大气中具有二次曲线型式的风速铅直分布。

为了求解和讨论的方便，不失一般性，我们仅研究两种最简单的高低空对称分布的折线型风速廓线下的斜压不稳定问题。

设 $A = -B$ ，则据(28)式，有 $\bar{u}_1 = \bar{u}_5$ (29)

且当 $A > 0$ 时， $\bar{u}_1 = \bar{u}_5 < \bar{u}_3$ (30)

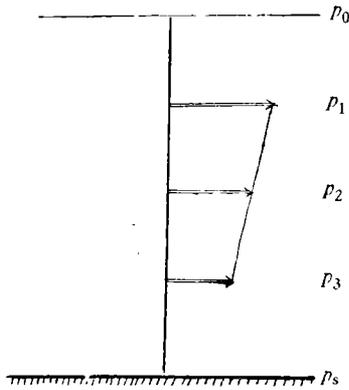


图 3a 线性型风速铅直廓线

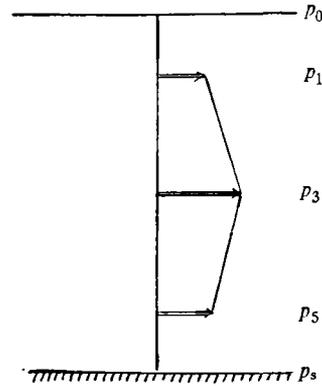


图 3b 中空强风型风速铅直廓线

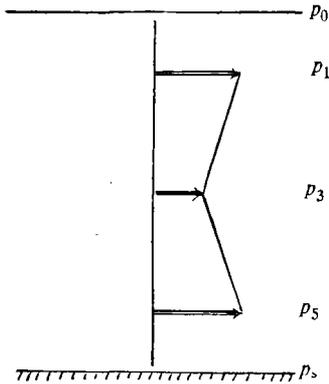


图 3c 高低空强风型风速铅直廓线

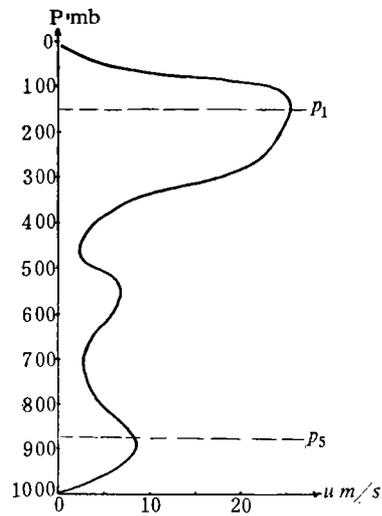


图 3d 1980年6月4日02时安庆高空风u分量

此时风速的铅直分布以中空为最大，其铅直廓线可称作“中空强风型”(图 3b)

当 $A < 0$ 时,
$$\bar{u}_1 = \bar{u}_5 < \bar{u}_3 \tag{31}$$

此时风速的铅直分布以中空为最小，该铅直廓线可称之为“高低空强风型”(图 3c)。(在实际大气中，当对流层顶和行星边界层顶高度上分别存在一支急流时，亦即存在高低空两支急流时，在 p_1 ($\doteq 167$ mb) 和 p_5 ($\doteq 833$ mb) 层间的风速铅直廓线与该型风速廓线颇为类似)。图 3 d。

因为这里仅考虑不同风速廓线对斜压不稳定性的影响，为简单计，我们设

$$\mu_2^2 = \mu_4^2 = \mu^2 \tag{32}$$

由(29)式，令 $\bar{u}_1 = \bar{u}_5 = \bar{u}$, $u_T = \bar{u}_3 - \bar{u}$
$$\tag{33}$$

则由(30)、(31)式，对于中空强风型廓线，有 $u_T > 0$ ，而对于高低空强风型廓线有

$$u_T < 0 \tag{34}$$

设 $c' = c - \bar{u}$ ，则 $c' = c - \bar{u}_1 = c - \bar{u}_5$, $c' - u_T = c - \bar{u}_3$
$$\tag{35}$$

此时方程组(13)式成为：

$$\left. \begin{aligned} [K^2c' + \mu^2(c' - u_T) + \beta]\hat{\psi}_1 - \mu^2c'\hat{\psi}_3 &= 0 \\ -\mu^2c'\hat{\psi}_3 + [K^2c' + \mu^2(c' - u_T) + \beta]\hat{\psi}_5 &= 0 \\ -\mu^2(c' - u_T)(\hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_5) + [K^2(c' - u_T) + 2\mu^2c' + \beta]\hat{\psi}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

由(36)式,可求得关于 c' 的特征方程为：

$$[K^2c' + \mu^2(c' - u_T) + \beta]\{[K^2(c' - u_T) + \beta][K^2c' + \mu^2(c' - u_T) + \beta] + 2\mu^2c'(K^2c' + \beta)\} = 0 \quad (37)$$

由(37)式,和不安定有关的两个复根可由二次方程(38)式决定：

$$K^2(K^2 + 3\mu^2)c'^2 + [(2K^2 + 3\mu^2)\beta - K^2u_T(K^2 + 2\mu^2)]c' + (\mu^2u_T - \beta)(K^2u_T - \beta) = 0 \quad (38)$$

其解为
$$c'_{1,2} = \frac{K^2u_T(K^2 + 2\mu^2) - (2K^2 + 3\mu^2)\beta \pm \sqrt{\delta}}{2K^2(K^2 + 3\mu^2)} \quad (39)$$

其中
$$\delta = [(2K^2 + 3\mu^2)\beta - K^2u_T(K^2 + 2\mu^2)]^2 - 4K^2(K^2 + 3\mu^2)(\mu^2u_T - \beta) \times (K^2u_T - \beta) = K^4(K^4 - 8\mu^4)u_T^2 + 2K^4\mu^2\beta u_T + 9\mu^4\beta^2 \quad (40)$$

当 $\delta < 0$ 时, $c'_{1,2}$ 为复数,存在着不安定波。

1. 两种折线形风速铅直廓线下的斜压不安定临界波长

由(40)式,对于 $\delta < 0$, 当 $u_T > 0$ 时, 必须 $K^4 < 8\mu^4$ (41)

当 $u_T < 0$ 时, 必须 $K^4 < 9\mu^4$ (42)

因此,在这两种风速廓线下,斜压不安定的临界波数不同,对于中空强风型廓线,临界波数 $K_{cI} = (8\mu^4)^{1/4}$,对于高低空强风型廓线,临界波数

$$K_{cII} = (9\mu^4)^{1/4} \quad (43)$$

在层结相同时,总有 $K_{cI} < K_{cII}$,因此,高低空强风型比中空强风型廓线下的临界波长更短。

比较两层模式中线性型下的临界波数

$$K_{cL} = \sqrt{2\mu^2}^{[4]}, \text{可见 } K_{cL} < K_{cI} < K_{cII} \quad (44)$$

上述分析可见,两种折线形风速廓线下的斜压不安定临界波长均比线性型下为短,其中尤以高低空强风型下的临界波长为最短,因此,该型下短波易于得到发展。

2. 不安定波发展的临界风速铅直切变

1) 当 $K^4 = 8\mu^4$ 即 $K^2 = 2\sqrt{2}\mu^2$ 时,由(40)式,对于 $\delta < 0$,

必须
$$u_T < -\frac{9\beta}{16\mu^2} \quad (45)$$

2) 当 $K^4 \neq 8\mu^4$ 时,令 $\delta = 0$,得到 u_T 的两个根：

$$u_{T_{1,2}} = \frac{-\mu^2\beta}{K^2(K^4 - 8\mu^4)} [K^2 \pm \sqrt{8(9\mu^4 - K^4)}] \quad (46)$$

(1) 若 $K^4 < 8\mu^4$,则(46)式成为：

$$\left. \begin{aligned} u_{T_1} &= \frac{\mu^2\beta}{K^2(8\mu^4 - K^4)} [\sqrt{8(9\mu^4 - K^4)} + K^2] \\ u_{T_2} &= \frac{-\mu^2\beta}{K^2(8\mu^4 - K^4)} [\sqrt{8(9\mu^4 - K^4)} - K^2] \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

显见: $u_{\tau_1} > 0, u_{\tau_2} < 0$, 它们分别对应着中空强风型和高低空强风型下的临界风速切变值,

且有

$$|u_{\tau_1}| > |u_{\tau_2}| \quad (48)$$

上式表明: 在相同的大气层结下, 对于 $K^4 < 8\mu^4$ 的同样波长的扰动, 两种风速铅直廓线下的斜压不稳定临界风速切变以高低空强风型下为小。这意味着, 扰动在该型下比在中空强风型下更易于得到发展。

(2) 若 $8\mu^4 < K^4 < 9\mu^4$, 则(46)式给出 u_{τ} 的两个负根:

$$\left. \begin{aligned} u_{\tau_1} &= \frac{-\mu^2\beta}{K^2(K^4-8\mu^4)} [K^2 + \sqrt{8(9\mu^4-K^4)}] \\ u_{\tau_2} &= \frac{-\mu^2\beta}{K^2(K^4-8\mu^4)} [K^2 - \sqrt{8(9\mu^4-K^4)}] \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\text{仅当 } u_{\tau_1} < u_{\tau} < u_{\tau_2} < 0 \text{ 时, } \quad \delta < 0 \quad (50)$$

因此, 对于接近临界波长的扰动, 在高低空强风型下只有在特定的风速铅直切变范围内, 才可能存在斜压不稳定。

u_{τ} 和 K, μ 的关系, 用无因次量 K^4/μ^4 为横座标, u_{τ} 以 β/μ^2 为单位作纵座标, 绘制了 $\delta=0$ 的中性曲线(图4), 它也是稳定区和不稳定区的分界线。

对 $\delta=0$ 式求导 $\frac{du_{\tau}}{dK}$, 并令其为0, 则得到: 对于高低空强风型, 最不稳定波的波数为:

$$K_i^4 = 6\mu^4, \quad \text{极小临界风速切变值} \quad |u_{\tau_{\min}}| = \frac{\beta}{2\mu^2} \quad (51)$$

$$\text{由于} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial p} \right| \approx \left| \frac{\bar{u}_3 - \bar{u}}{2\Delta p} \right| = \left| \frac{\bar{u}_3 - \bar{u}}{2(p_s/6)} \right| = \frac{3}{p_s} |\bar{u}_3 - \bar{u}| = \frac{3}{p_s} |u_{\tau}| \quad (52)$$

$$\text{所以有} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{\min} \approx \frac{3}{2p_s} \frac{\beta}{\mu^2} \quad (53)$$

对于中空强风型, 最不稳定波的波数为: $K_i^4 = 3\mu^4$, 极小临界风速切变值

$$|u_{\tau_{\min}}| = \frac{\beta}{\mu^2} \quad (54)$$

$$\text{相应地有} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{\min} \approx \frac{3}{p_s} \frac{\beta}{\mu^2} \quad (55)$$

而对于线性型, 由二层模式 ($u_{\tau} = \bar{u}_3 - \bar{u}_1$) 得到: ^[4]

$$K_i^4 = 2\mu^4, \quad |u_{\tau_{\min}}| = \frac{\beta}{\mu^2}, \quad \text{相应地有} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{\min} \approx \frac{2}{p_s} \frac{\beta}{\mu^2} \quad (56)$$

(51)–(56)式说明: i) 风速的铅直分布型式不同, 最不稳定波的波长和最小临界风速切变都不同。ii) 高低空强风型廓线下的最不稳定波波长最短, 最小临界风速切变值也最小。

而且, 从图(4)中还可以看到, 在 $\mu^2 < K^2 < 3\mu^2$ 区间中, 高低空强风型的中性曲线变化比较平缓, 其临界风速切变值变化不到 $\frac{\beta}{2\mu^2}$, 比中空强风型和线性型临界切变随 K 的变化率小得多。这意味着在高低空强风型下, 不稳定斜压波的波谱比中空强风型和线性型下

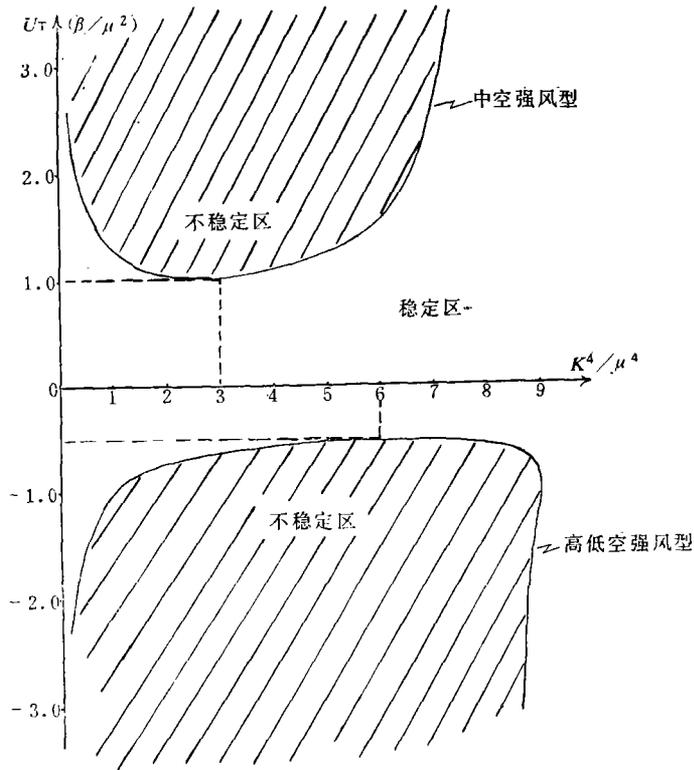


图 4 三层准地转模式中的中性稳定曲线

更宽。

综上所述：在高低空强风型下，只要有很小的风速铅直切变即可发生斜压不稳定，且不稳定临界波长和最不稳定波波长均比其它风速铅直廓线为短，不稳定波的频谱也较宽。因此，高低空强风型廓线是中纬天气系统发生发展的一种极为有利的风速铅直分布型式。从天气预报的角度来看，由于一般在中纬地区对流层顶处通常总存在一支西风急流（不考虑侧向切变）当低空突然新生一支天气尺度的急流时（如副高北跳或华西低槽东移加深时，常形成低空急流，这种高低空两支急流的风速廓线很类似于高低空强风型风速廓线，因而特别有利于天气系统的发展。由此可以推论：低空急流不仅是水汽和动量的重要输送通道，而且是天气系统斜压发展的重要动力条件，在形势分析和预报中，必须十分注意低空强风的形成和发展。

3. 不稳定波的结构

对于不稳定波，有

$$c' = c'_r + ic'_i \tag{57}$$

(57)式代入(39)式，在两种折线型风速廓线下得到：

$$\left. \begin{aligned} c'_r &= [K^2 u_T (K^2 + 2\mu^2) - (2K^2 + 3\mu^2)\beta] \times [2K^2(K^2 + 3\mu^2)]^{-1} \\ c'_i &= [K^4(8\mu^4 - K^4)u_T^2 - 2K^4\mu^2\beta u_T - 9\mu^4\beta^2]^{1/2} \times [2K^2(K^2 + 3\mu^2)]^{-1} \end{aligned} \right\} \tag{58}$$

由(36)式可得

$$\hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_5 \tag{59}$$

把(58)式代入(36)式，得到：

$$\hat{\psi}_3 = \left[\frac{K^4 u_T + \mu^2 \beta}{2\mu^2(K^2 u_T - \beta)} + i \frac{K^2(K^2 + 3\mu^2)}{\mu^2(K^2 u_T - \beta)} c_i \right] \hat{\psi}_1 = D e^{i\gamma} \hat{\psi}_1 \quad (60)$$

$$\text{这里 } D = \left| \frac{2(K^2 u_T + \beta)}{K^2 u_T - \beta} \right|^{1/2}, \quad \text{tg} \gamma = \frac{2 K^2(K^2 + 3\mu^2)}{K^4 u_T + \mu^2 \beta} c_i \quad (61)$$

通过一些简单的代数运算可知:对于不稳定扰动,在中空强风型下通常总有 $D > 1$ 及 $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ 而在高低空强风型下通常总有 $D < 1$ 及 $0 > \gamma > -\frac{\pi}{2}$ 。

把(57)和(60)式代入(12)式并取实部得到:

$$\left. \begin{aligned} \psi'_5 &= \psi'_1 = \hat{\psi}_1 e^{Kc_i t} \cos K(x - c, t) \\ \psi'_3 &= D \hat{\psi}_1 e^{Kc_i t} \cos K(x - c, t + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

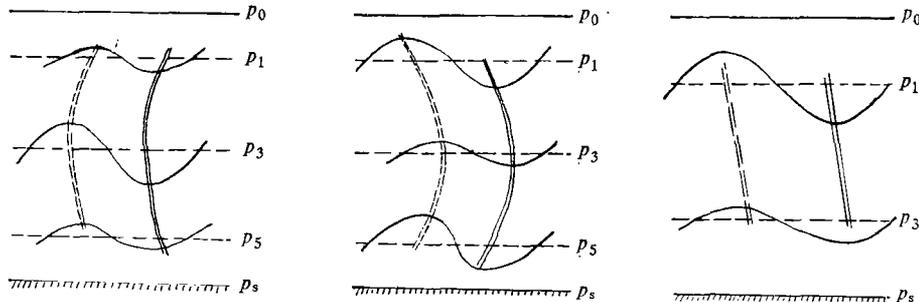


图 5 a 中空强风型廓线下不稳定扰动的垂直结构

图 5 b 高低空强风型下不稳定扰动垂直结构

图 5 c 线性型(且 $\frac{\partial u}{\partial p} < 0$)下不稳定扰动的垂直结构

在中空强风型下,由于 $D > 1$,不稳定扰动的振幅以对流层中层为最大。也即扰动在中层比上下层更为明显,并且由于 $\gamma > 0$,因而中空扰动的位相落后于高低空,就低槽而言,低空呈后倾槽,高空呈前倾槽(图 5 a)。

在高低空强风型下,由于 $D < 1$,不稳定扰动的振幅以中层为最小,因而扰动在高低空比中空更加明显,并且由于 $\gamma < 0$,中空扰动的位相超前于高低空,就低槽而言,低空呈前倾槽;高空呈后倾槽。(图 5 b)

在线性型下,两层模式的结果为:当风速随高度增大时,扰动的结构是低槽随高度后倾,并且高空扰动的振幅大于低空(图 5 c)^[4]。

可以注意到,在这几种风速铅直廓线下,不稳定扰动的振幅均以大风速层上为最大,亦即在此高度上扰动最为显著,因而在这个层次上易于发现和跟踪不稳定扰动的发生发展,从预报的角度来看,对于大风速层高度上的环流和系统的演变应该比其它层次更为重视。

五、结论和一点看法

1. 大气层结斜压不稳定性的影响不仅表现在对不稳定临界波长和临界风速铅直切变的制约上,而且其铅直分布的不均一性决定了大气的各个层次对斜压不稳定的贡献大小。扰动的斜压发展主要取决于静力稳定度较小的那些层次内的热力和动力条件。当大气高低空层结差异很大时,常常仅局限于在静力稳定度较小的层次中有较为明显的

扰动发展,在静力稳定度很大的层次中扰动很弱,它是受抑制的。

2. 由于发展的斜压扰动其能量主要取自平均气流的有效位能,因而扰动的发展与否必然与风速的铅直切变的强弱和分布型式密切相关。高低空强风型廓线是扰动发展的一种极为有利的风速铅直分布型式。在这种廓线下,不稳定临界波长和最不稳定波的波长较短,不稳定波的频谱较宽。因此,低空强风层的形成和发展是形势预报中的一个重要着眼点。低空强风(急流)的重要性不仅在于提供了强的水汽和动量输送通道,而且其自身正是扰动斜压发展的一个十分有利的动力条件。

3. 注意到在各种风速铅直廓线下,不稳定扰动的振幅均以大风速层上为最大,因此,在日常形势分析中我们应侧重于分析大风速层上的形势演变。由于高空图垂直间距较大,大风速层有时不在标准等压面上,这就不易及早发现和跟踪不稳定扰动的发生发展,从而可能导致预报的失误。适当地加密一些图次(特别在低空)以准确地分析出低空强风层及相应高度上的形势演变是很有必要的。

参 考 文 献

- [1] Holton, J. R. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, Inc. 1972. 127. 186—202.
 [2] 哈廷纳. G. J. 数值天气预报(中译本), 155—160, 科学出版社。
 [3] 郭晓岚(美), 大气动力学, 209—223, 江苏科学技术出版社。
 [4] 杨大升等, 动力气象学: 212—219, 气象出版社, 1980。
 [5] 谢义炳, 湿斜压大气的天气动力学问题, 暴雨文集, 1—15, 吉林人民出版社, 1980。

THE EFFECTS OF VERTICAL STRATIFICATION OF TEMPERATURE AND OF VERTICAL WIND SHEAR ON THE DEVELOPMENT OF SYNOPTIC SYSTEMS

Xiao Yong Sheng

(*Meteorological Institute of Anhui Province*)

Abstract

Using a quasi-geostrophic three layer baroclinic model, the baroclinic instability in different vertical stratification of temperature and in different vertical wind shear conditions are discussed and analysed. It is found that not only the stratification of atmosphere defines the critical wavelength of instable waves, but also its vertical difference determines the contribution to The baroclinic instability (in each level) the baroclinic development of small perturbations depends primarily on thermal and dynamical conditions in layers with smaller static stability. It is also found that the wind is stronger in high and low levels, it is most favourable in the development of instable disturbances.