第15卷 第3期 海 洋 学 报 Vol.15, No.3
1993-05 ACTA OCEANOLOGICA SINICA May, 1993

钢筋混凝土疲劳性能的非线性有限单元法分析*

宋玉普 赵顺波 王瑞敏 李树瑶

(大连理工大学土木系)

摘 要 为分析海洋混凝土结构在波浪及海流等荷载作用下的疲劳特性，基于试验结果分析，我们建议了一个用弹塑性增量变刚度法分段跟踪疲劳应力-应变关系曲线及应力循环次数与疲劳应变关系曲线相结合的非线性有限元分析法. 混凝土的本构模型采用内时损伤模型.该分析方法的特点是利用较少的机时，就可分析得出结构经过任一疲劳次数(包括上百万次)高周疲劳全过程后的应力、应变状态.这在国内外尚属少见,从而为海洋混凝土结构疲劳特性的有限元分析及用分析法部分代替冗长、昂贵的疲劳试验提供了条件. 为验证分析方法的可靠性，我们对海洋平台中经常遇到的钢筋混凝土板的疲劳特性进行了分析，所得计算结果与试验结果符合较好，证明了本文所建议方法的可行性.

关键词 钢筋混凝土 疲劳 非线性 有限单元法分析

前 言

海洋混凝土结构,如钢筋混凝土栈桥、采油平台等,经常受到波浪及海流等重复循环荷载的作用,在结构设计中,考虑这些荷载效应，以达到经济和可靠相统一的设计结果是十分重要的. 为此，首先要对结构在疲劳荷载作用下的性能进行研究. 以往，在这一研究领域中，主要以试验研究手段为主.众所周知,混凝土结构及构件疲劳性能的试验是非常耗资费时的，因此，能否采用分析方法代替或部分代替疲劳试验,一直是有关研究者迫切的愿望.对在线弹性加卸载条件下,形状和边界条件均简单的结构或构件用分析方法代替试验方法是可能的,但对弹塑性状态疲劳问题,特别象混凝土材料常常是带有裂缝工作的,其疲劳特性的分析方法研究则是很困难的. 目前关于疲劳问题的分析方法主要有四种：热点应力分析法、热点应变或变形分析法、断裂力学分析法和本构关系分析法. 其中最有吸引力的描述和预示钢筋混凝土结构疲劳特性的分析方法是本构关系分析法，如有限单元法，因为它能适应任意结构形式、加载条件、支承条件,能考虑多轴应力的影响,并能给出整个结构在疲劳荷载作用下的应力、应变状态,但目前仅能对低周疲劳或很少次数的高周疲劳进行分析,且需要很长的计算机时.

本文于1991-05-20收到，修改稿于1991-11-20收到.

*国家自然科学基金资助项目.钱国良、曲秀华参加了有关试验.

对成千上万次循环的弹塑性疲劳问题的有限元分析还很少见，其根本原因是对上万次甚至上百万次荷载循环要逐个反复地进行弹塑性分析，其工作量将大得难于计算．为此，我们根据试验结果，把疲劳应力-应变曲线按循环次数-应变曲线分为三个部分，在每一部分中，认为材料各次的加卸载规律是近似相同的．这样，只需要跟踪少数几次对应每一部分σ-ε曲线的弹塑性全过程分析，就可得出结构经过所求次数循环后的应力、应变状态，从而大大节省了计算机时，使上百万次的疲劳分析成了可能．我们应用上述分析方法，针对海洋平台设计中经常遇到的钢筋混凝土板（如方形罐体的罐壁、顶盖板、横隔板、基础底板等）的疲劳特性问题编制了非线性有限元分析程序，并用于试验板的分析中，取得了较满意的结果．

1　基本假定

1.1　试验结果分析

根据文献〔1～3〕的试验结果，我们发现，无论是混凝土材料，还是钢筋混凝土梁、板构件，在重复荷载作用下，其应力循环次数N与疲劳应变ε的关系曲线基本可分为三段（如图1所示）：第一阶段，混凝土的变形增长速率开始较快，随后其增长速率逐渐降低．这一阶段较短，大约占总疲劳寿命的1%～10%左右．第二阶段，混凝土的变形增长速率基本为定值，N-ε关系基本呈线性．这一阶段占疲劳寿命的80%左右．第三阶段，混凝土的变形速率增长较快，导致试件最后破坏．这一阶段大约占疲劳寿命的10%～15%左右．由图1可见，第一阶段和第三阶段N-ε关系呈非线性，但由于这两阶段较短，简化为线性段不会给计算结果带来较大的影响，所以我们把N-ε曲线简化为由三段直线组成的分段线性关系线．

与N-ε曲线相似，疲劳应力-应变关系曲线的试验结果也可分为相应的三个阶段：第一阶段为材料的瞬态期，其各次循环的σ-ε关系曲线变化较大，但总的次数较少，可近似估算为总疲劳寿命的1%～10%．第二阶段为稳定循环阶段，此时各次循环的σ-ε曲线基本相同．第三阶段，混凝土的变形模量降低较多，经过很少次的循环，材料就进入破坏状态．从工程对寿命预测的精度要求看，计算疲劳寿命可以近似把σ-ε曲线完全按稳定状态的材料特性处理，但我们为了预测任一疲劳次数后的结构受力状态，仍按三个阶段来考虑σ-ε曲线．在每个阶段，近似认为各次的循环应力-应变曲线是相似的，即认为在各次循环中，材料的变形模量的变化规律相同，产生的应变相同．

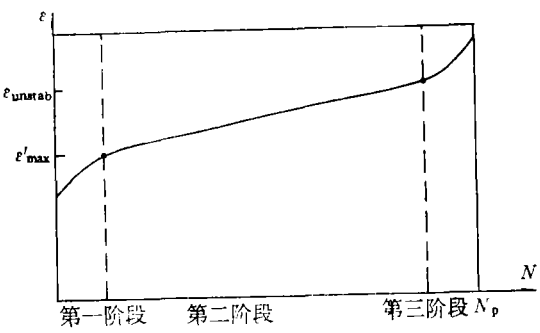

图1　纵向应变随荷载重复次数的变化规律

从混凝土板的试验结果发现，钢筋的N-ε关系曲线与混凝土材料相似，也分为三个相应的阶段．钢筋疲劳破坏时，断口平稳，其强度一般低于静力强度．

钢筋混凝土板破坏的标志是钢筋断裂或滑移，导致挠度和变形急剧增长，

1.2 有限元分析中的基本假定

根据上述对试验结果的分析，在有限元分析中，可作如下假定：

1．混凝土和钢筋的N-ε关系曲线由三条直线组成，其分界点按1%～10%、80%总疲劳寿命确定．

2．混凝土和钢筋的σ-ε关系曲线按N-ε关系曲线分为相应的三个阶段，在每个阶段，近似认为各次的循环应力-应变曲线是相似的，即认为在各次循环中材料的变形模量及应变的变化规律相同．因而，在每个阶段，只需按开始一次的循环应力-应变曲线进行弹塑性分析，就可由按该阶段循环次数的累加，来表征相应阶段的疲劳特性．

3．结构破坏的标志是变形急剧增长．

2．有限元分析模型和分析过程

2.1 混凝土材料的本构关系

在疲劳荷载作用下，混凝土材料的本构关系采用文献〔4〕中建立的内时损伤本构模型，其表达式为：

$$\{d\sigma\}=[\bar{D}]\{d\varepsilon\}-\{d\sigma'\}, \tag{1}$$

式中，

$$\{d\sigma\}^T=\{d\sigma_x\ d\sigma_y\ d\tau_{xy}\vdots d\tau_{yz}\ d\tau_{zx}\}=\{\{d\sigma_t\}^T\{d\sigma_s\}^T\},$$

$$\{d\varepsilon\}^T=\{d\varepsilon_x\ d\varepsilon_y\ d\gamma_{xy}\vdots d\gamma_{yz}\ d\gamma_{zx}\}=\{\{d\varepsilon_t^{\mathrm{el}}\}^T\{d\varepsilon_s\}^T\},$$

$$\{d\sigma'\}^T=\{d\sigma'_x\ d\sigma'_y\ d\tau'_{xy}\vdots d\tau'_{yz}\ d\tau'_{zx}\}=\{\{d\sigma'_t\}^T\{d\sigma'_s\}^T\},$$

$$[\bar{D}]=\begin{bmatrix}[\bar{D}_t] & 0\\ 0 & [\bar{D}_s]\end{bmatrix}.$$

当静水应力$\sigma_{kk}\geqslant 0$时，

$$[\bar{D}]=(1-D)[D], \tag{2a}$$

$$\{d\sigma'\}=(dz+dD-Ddz)\{S^n\}+\frac{dD}{3}\sigma_{kk}^n\{\delta_{ij}\}. \tag{2b}$$

当静水应力$\sigma_{kk}<0$时

$$[\bar{D}]=(1-D')[D]+\frac{D'}{3}[D_p], \tag{3a}$$

$$\{d\sigma'\}=\left(dz+dD'-D'dz+\frac{D'}{3}dz\{\delta_x\}\right)\{S^n\}. \tag{3b}$$

在式(2a)～(3b)中，

$$[D]=\frac{F}{1-\mu^2}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ \mu & 1 & \text{对} & & \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[D_f] & 0\\ 0 & [D_s]\end{pmatrix},$$

$$[D_p]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ \mu & 1 & \text{对} & & \\ 0 & 0 & 0 & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[D_{fp}] & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

D和D'分别为当静水应力$\sigma_{kk}\geqslant 0$和$\sigma_{kk}<0$时的损伤变量，$\mathrm{d}D$和$\mathrm{d}D'$为其相应的增量：

$$D=1-\exp(-12\,000\varepsilon_m-308\,000\xi^{1.2}), \tag{4a}$$

$$D'=0.9[1-\exp(-1\,025\xi^{1.1})], \tag{4b}$$

$\mathrm{d}z$为内时增量：

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}\xi}{f(\xi)}, \tag{5}$$

$$f(\xi)=\frac{0.001+\dfrac{0.05\xi+50\xi^2+0.1(mL)^{3/4}}{1+\left|\dfrac{0.079I_3^n}{f_C{}^3}\right|^{1/4}}}{C}, \tag{6}$$

$\{\delta_K\}^T=\{11000\}$为Kroneker符号列阵.

在式(4a)～(6)中，$\mathrm{d}\xi=\|\mathrm{d}e_{ij}\|$，符号“‖ ‖”表示范数，$L=(e_{km}e_{km}/2)^{\frac{1}{2}}$；$m=|\xi/L-1|$，$I_3^n$为有效应力$\sigma_{ij}^n$的第三不变量，$f_C$为混凝土的轴心抗压强度，$C$为考虑循环加载的系数，对于单调加载$C=1$；对于循环加载，$C$按下述原则确定：

对$\mathrm{d}w\leqslant 0$，并且$w=w_0$：$C=1$（首次加载），

对$\mathrm{d}w<0$：　　$C=C_u$　　（卸载），

对$\mathrm{d}w\geqslant 0$，并且$w<w_0$：$C=C_r$（重新加载），

其中$\mathrm{d}w$为变形功，$\mathrm{d}w=S_{km}\mathrm{d}e_{km}$，$w_0$表示到目前为止的$w$的最大值．$C_u=0.6$，$C_r=0.8$．

$\{S^n\}^T=\{S_x^n\ S_y^n\ S_{xy}^n\ S_{yz}^n\ S_{zx}^n\}$为有效应力偏量列阵；

$\{\sigma^n\}^T=\{\sigma_x^n\sigma_y^n\tau_{xy}^n\tau_{yz}^n\tau_{zx}^n\}$为有效应力列阵；$\sigma_{kk}^n$为有效静水应力．

$$\{S^n\}=\{\sigma^n\}-\frac{\sigma_{kk}^n}{3}\{\delta_k\}. \tag{7}$$

当静水应力$\sigma_{kk}\geqslant 0$时，

$$\{\sigma^n\}=\frac{\{\sigma\}}{1-D}. \tag{8a}$$

当静水应力$\sigma_{kk}<0$时，

$$\{\sigma^n\}=\frac{\{\sigma\}-\frac{D'}{3}\sigma_{kk}\{\delta_k\}}{1-D'}. \tag{8b}$$

2.2 钢筋的本构关系

板中钢筋的本构关系按线性加卸载规律，但要考虑塑性变形. 其加载的应力-应变关系式为：

$$\sigma_a=E\varepsilon_a, \tag{9}$$

$$\varepsilon_a=\varepsilon_{ea}+\varepsilon_{pa}, \tag{10}$$

式中，σ_a为应力幅值，ε_a为应变幅值，ε_{ea}为ε_a中的弹性部分，ε_{pa}为ε_a中的塑性变形部分ε_{pa}在第一阶段取25×10^{-10}，第二阶段取0.85×10^{-10}，第三阶段取5×10^{-10}[5].

钢筋的破坏准则按累积残余应变值达到极限为准. 该极限值由试验结果确定为$800\times10^{-6}\sim1\,200\times10^{-6}$.

2.3 结构的理想化

根据钢筋混凝土板的具体厚度将板沿厚度方向离散成若干层，每层再离散成heterosis九结点单元.对同一单元，各层具有共同的结点，即各层具有相同的结点位移. 每个结点有三个位移变量，其中一个线位移w和两个角位移θ_x、θ_y. 单元结点编号的顺序及各未知变量的正方向规定如图2所示.

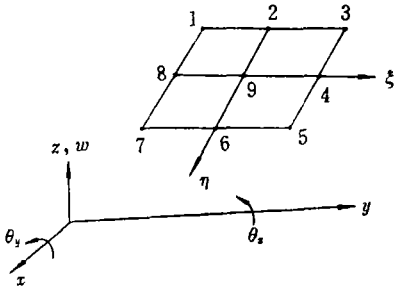

图2 单元结点编号及位移坐标系

钢筋混凝土板中的钢筋折算成等效钢板，但仅在原钢筋方向具有刚度，即当钢筋应力达到屈服强度以前，取材料矩阵：

$$[D]_s=\frac{1}{1-\mu^2}\begin{pmatrix}E_{s_1}&0&0\\0&E_{s_2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{11}$$

式中，E_{s_1}、E_{s_2}分别为钢筋沿两个方向的折算弹性模量.当钢筋屈服后，则屈服方向钢筋的刚度降为零.

在有限元分析中，不考虑钢筋和混凝土之间的粘结-滑移.

计算以Mindlin板理论为基础[6]，即假设板的正应力σ_z忽略不计，在分析过程中，考虑横向剪切变形的影响.

单元刚度是通过累加该单元的各层刚度得到的.

2.4 单元平衡方程

图3为一heterosis九结点单元，设单元结点位移增量列阵$\{d\delta\}^T=\{d\delta_1 d\delta_2\cdots d\delta_9\}\times\{d\delta_i\}^T=\{dw_i d\theta_{xi} d\theta_{yi}\}$，$(i=1,9)$，第$j$层中性面沿厚度方向的坐标为$z_j$，该层厚度为$dz_j$，则第$j$层的弯曲应变增量$\{d\varepsilon_f\}_j$和剪切应变增量$\{d\varepsilon_s\}_j$分别为：

$$\{d\varepsilon_f\}_j = z_j [B_f]\{d\delta\}, \qquad (12)$$
$$\{d\varepsilon_s\}_j = [B_s]\{d\delta\},$$

其中，

$$[B_f] = [B_{f_1} B_{f_2} \cdots B_{f_9}],$$
$$[B_s] = [B_{s_1} B_{s_2} \cdots B_{s_9}],$$

$$[B_{f_i}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$[B_{s_i}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} & -\bar{N}_i & 0 \\ \dfrac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} & 0 & -\bar{N}_i \end{bmatrix} \qquad (i=1, 9),$$

N_i和$\bar{N}_i$分别为Lagrange和Serendipity形函数[6].

利用虚功原理，可得增量形式的单元平衡方程：

$$\int_v [B]^T \{d\sigma\} dv = \{dR\}. \qquad (13)$$

将式(12)、(11)和(1)代入式(13)可得：

$$[K]\{d\delta\} = \{dR\} + \{dR^p\}, \qquad (14)$$

式中，$[K]$为单元刚度矩阵，由混凝土层和等效钢板层刚度累加而成，即：

$$[K] = [K_f]_c + [K_s]_c + [K]_s, \qquad (15)$$

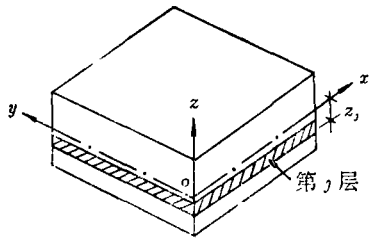

图 3

$$[K_f]_c = \int_A \left[\int_{-t/2}^{-t/2+c} z_j [B_f]^T [\bar{D}_f][B_f] dz_j + \int_{-t/2+c+t_s}^{t/2} z_j [B_f]^T [\bar{D}_f][B_f] dz_j \right] dA,$$

$$[K_s]_c = \int_A \left[\int_{-t/2}^{-t/2+c} [B_s]^T [\bar{D}_s][B_s] dz_j + \int_{-t/2+c+t_s}^{t/2} [B_s]^T [\bar{D}_s][B_s] dz_j \right] dA,$$

$$[K]_s = \int_A \int_{-t/2+c}^{-t/2+c+t_s} z_j [B_f]^T [D]_s [B_f] dz_j dA,$$

$\{dR\}$为等效结点荷载增量列阵，而$\{dR^p\}$为虚拟混凝土塑性力列阵：

$$\{dR^p\} = \{dR_f^p\} + \{dR_s^p\}, \qquad (16)$$

$$\{dR_f^e\}=\int_A\left[\int_{-t/2}^{-t/2+c}z_j[B_f]^T\{d\sigma_f'\}dz_j+\int_{-t/2+c+t_s}^{t/2}z_j[B_f]^T\{d\sigma_f'\}dz_j\right]dA,$$

$$\{dR_s^e\}=\int_A\left[\int_{-t/2}^{-t/2+c}[B_s]^T\{d\sigma_s'\}dz_j+\int_{-t/2+c+t_s}^{t/2}[B_s]^T\{d\sigma_s'\}dz_j\right]dA.$$

在上述各式的积分中，t为板的厚度，C为混凝土保护层厚度，t_s为等效钢板层的厚度，dv为微元体积，dA为微元面积.

2.5 开裂及压碎单元的处理

本文的程序采用涂敷式裂缝模型.当单元中某积分点的主拉应力超过极限值时,则认为该积分点代表的区域开裂. 此时将主拉应力方向的刚度及应力均降低为零，经过应力调整后，将释放应力做为结点力重新分配给其它单元承担. 反向加载导致裂缝闭合后，垂直于裂缝方向重新开始承载. 裂缝张开、闭合条件按下式计算[7]：

$$C_{wj}=\frac{\sigma_{cri}}{E_i}+\sum_1^N\Delta\varepsilon_{iu}, \tag{17}$$

式中，σ_{cri}为混凝土开裂时的应力，E_i为开裂前的切线模量，$\Delta\varepsilon_{iu}$为垂直于裂缝方向的等效单向应变的变化，N为自裂缝形成到计算时刻的荷载增量级数.

2.6 有限元分析过程

1. 把总疲劳次数分为三个阶段，每阶段的次数按具体材料及结构特性确定.

2. 根据第一阶段的材料特性，采用增量变刚度法，加载至荷载幅值P_{max}.

3. 卸载至P_{min}（按卸载规律）.

4. 计算第一次荷载循环后各单元的残余应变ε_{pa1}及残余应力σ_{pa1}.

5. 将上述残余应变及应力乘以第一阶段的疲劳次数N_1（或第一阶段内任一要求计算的疲劳次数），得出第一阶段结束时(或第一阶段内要求计算的疲劳次数结束时)的总残余应变ε_{p1}及总残余应力σ_{p1}.

6. 根据ε_{p1}、σ_{p1}，按第二阶段的材料特性，采用增量变刚度法，由最小荷载P_{min}，加载至荷载幅值P_{max}.

7. 按卸载规律，卸载至P_{min}.

8. 计算第二阶段第一次循环后各单元的残余应变ε_{pa2}及残余应力σ_{pa2}.

9. 将ε_{pa2}及σ_{pa2}乘以第二阶段的疲劳次数N_2（或第二阶段内任一要求计算的疲劳次数），得出第二阶段（或第二阶段内要求计算的疲劳次数）的残余应变ε_{p2}及残余应力σ_{p2}.

10. 累加ε_{p1}与ε_{p2}、σ_{p1}与σ_{p2}，得出当前的总残余应变ε_p和总残余应力σ_p.

11. 如需要计算第三阶段，则重复上述6～10的步骤，只是其中的ε_{p1}、σ_{p1}改为ε_p和σ_p；材料特性用第三阶段的；ε_{p2}、σ_{p2}改为ε_{p3}、σ_{p3}；N_2改为N_3；ε_{p2}、σ_{p2}改为ε_{p3}、σ_{p3}；累加ε_p与ε_{p3}、σ_p与σ_{p3}.

每步计算中都要用总残余应变检查是否有混凝土开裂、压碎及钢筋屈服现象. 钢筋屈服时的总残余应变大约为800×10^{-6}～$1\,200\times10^{-6}$，我们计算中取$1\,000\times10^{-6}$.

3 有限元分析结果与试验结果的比较

根据上述分析模型及分析过程，我们对文献〔1〕中的钢筋混凝土试验板进行了电算分析. 试验板制作采用425号普通硅酸盐水泥，粗骨料采用直径不大于20 mm的碎石，配筋采用Ⅱ级钢筋. 试验时，混凝土的龄期为六个月，15 cm×15 cm×15 cm正方体试块的平均抗压强度为34 MPa. 所有试验均在从美国MTS公司引进的疲劳试验机上完成，采用线加载，支承条件为两边简支. 试验板的截面尺寸、配筋图、支承条件及加荷位置如图4所示. 试验中每组试验板取两块板做静载破坏试验，确定疲劳试验荷载大小，取另两块板作高周重复试验，所施加的重复荷载最大值为0.60倍的静载极限强度，循环特性$\rho=0.3$.

图4为B-2-1板的单元划分和板底(侧)裂缝的实测与电算分析图形的比较，由图可见，两者是较为接近的.

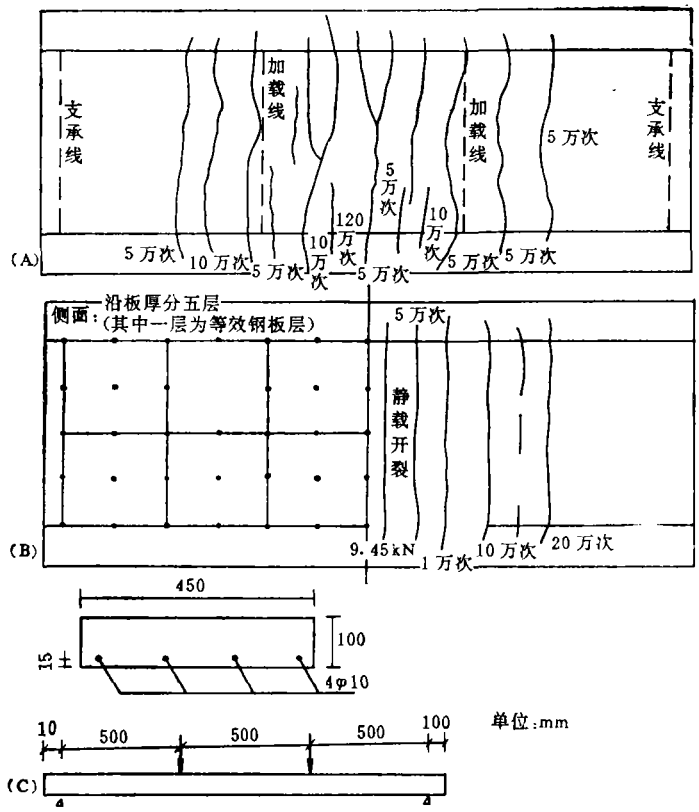

图 4　B-2-1板试验及计算裂缝图形比较

(A) 试验结果，(B) 电算结果，(C) 配筋详图及加荷示意图

图5为B-2-8、B-2-1和B-2-2板在静载和疲劳作用下挠度实测值与分析值的比较，由图可见，两者符合程度也较好.

用本文方法分析这三块板疲劳寿命的结果为：B-2-8，70万次、B-2-1，200万次和B-2-2,500万次.三块板的实测结果为，B-2-8,80万次，B-2-1,179万次,而B-2-2,200万次未疲劳破坏,加静载至16.25 kN破坏. 三块板的疲劳破坏电算结果均为受拉钢筋累积残余应变达到极限值. 这与B-2-8、B-2-1板实际试验由钢筋疲劳拉断引起破坏是一致的.

4 结束语

我们建议的用弹塑性增量变刚度法与分段跟踪疲劳应力-应变关系曲线及应力循环次数与疲劳应变关系曲线相结合的有限单元法为结构的疲劳全过程非线性分析提供了实用可靠的分析模型，其特点是：利用较少的机时，就可分析得出结构经过任一疲劳次数（包括上百万次）高周疲劳的全过程应力、应变状态，从而可部分代替冗长、昂贵的疲劳试验，对节省人力、物力具有实用价值；采用混凝土内时损伤本构模型，不需要屈服面的概念，从而简化了计算过程，节省了计算机时；建议模型的计算结果与试验结果符合较好.

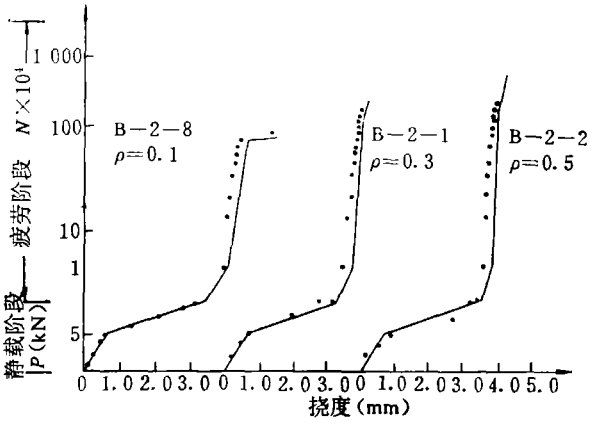

图5 疲劳循环次数与挠度关系

·为实测点，折线为电算结果

钱国良和曲秀华参加了有关试验，在此表示感谢.

参考文献

1 王瑞敏. 混凝土结构的疲劳性能研究. 大连理工大学博士论文, 1989, 11～15

2 Jan Ove Holmen.Fatigue of Concrete by Constant and Variable Amplitude Loading, Fatigue of Concrete Structures. ACI Publication SP-75, Detroit, 1982, 71～110

3 太原工学院(现太原工业大学)土木系. 钢筋混凝土受弯构件正截面疲劳验算方法的研究. 钢筋混凝土结构研究报告选集, 北京: 中国建筑工业出版社, 1981, 235～254

4 宋玉普，赵国藩. 混凝土内时损伤本构模型. 大连理工大学学报, 1990, 30(5): 577～584

5 CEB Comite Euro-International Du Beton. Fatigue of concrete structures. Bulletin D'INFORMATION, CEB, Dubrovnik, 1988, (188): 85～134

6 Owrn D R J, E Hinton. Finite Elements in Plasticity (Theory and Practice), Pineridge Press Limited, Swansed, U.K., 1980, 319～373

7 宋玉普. 钢筋混凝土有限元分析中的力学模型研究. 大连理工大学博士论文, 1988, 72～78