

# 层状煤岩介质的基本解

张劲, 牟善波, 张士诚

中国石油大学(北京), 北京, 102249

**内容提要:** 煤岩的水力压裂实际上就是半无限大分层均匀介质的断裂问题, 要利用有限元法或边界元法模拟裂缝扩展, 就必须找出半无限空间的基本解。本文从三维弹性力学最基本的平衡方程和本构关系出发, 推导出状态传递微分方程。在求解状态传递微分方程时, 对指数矩阵进行分解, 避免了直接解法导致状态变量的发散。引入了半无限体的无穷边界条件, 推导出半无限层表面的位移与应力关系式。根据状态传递方程, 可得出层状煤岩任意点的应力和位移的值。此结果可直接退化到经典的半无限域经典的 Mindlin 解。

**关键词:** 传递矩阵; 积分变换; 基本解; Mindlin 解

水力压裂的过程, 一般需要在目标层中, 通过井筒注入高压液体以尖劈目标层, 从而形成并延伸裂缝。为了使产生的裂缝在高压液体返排后不致于闭合, 在形成裂缝以后, 接着泵注混有支撑剂的携砂液。携砂液将继续延伸裂缝并将支撑剂留在裂缝内。当支撑剂泵送完毕后, 将粘性压裂液破胶降为低粘度的液体流回井内, 然后返排回到地面。在目标层内留下一条高导流的裂缝, 以利油和气的由地层远处流向井底。裂缝一般在井的两边形成对称的两翼, 大体在垂直平面内延伸。

煤岩的水力压裂实际上就是半无限大分层均匀介质的断裂问题, 要利用有限元法或边界元法模拟裂缝扩展, 就必须找出半无限空间的基本解。

Benitez & Rosakis(1987)利用 Bufler(1971)和 Bahar(1972)提出的矩阵传递法和 Cayley-Hamilton 定理(Shames et al., 2004), 导出了单层和多层各向同性无限大物体的点力解, 并给出了状态变量的积分表达式。他们通过观察发现在被积函数中增加一乘子  $e^{-\rho}$  可以保证状态变量可积性, 而且修正后的结果能满足平衡方程和应力边界条件。但对被积函数的这种修正要有相当高的技巧。

范加让(1996)系统地论述了状态空间法, 并利用三角级数展开得出了层合厚板壳问题的精确解。丁浩江等(1996)由横观各向同性弹性力学基本方程

出发, 推导出含应力和位移两类变量的混合方程, 利用 Fourier 变换和丁浩江等(1996)得出的横观各向同性弹性力学问题的通解, 求解出状态传递矩阵的具体形式。由此得出的无限大横观各向同性弹性层点力解可直接退化到无限体的 Kelvin 解和半无限体的 Mindlin 解。

本文从三维弹性力学平衡方程出发, 利用各向同性的本构关系, 推导出煤岩分层各向同性物体在单位点荷载作用下的矩阵传递方程。在矩阵传递方程求解中对指数矩阵进行分解, 使分解后的矩阵中每列的元素只含有  $e^{-\rho}$  或只含有  $e^{\rho}$ , 以便能方便地处理无限大物体的边界条件。同时给出了一些典型情况的基本解。所得结果经验证可直接退化到无限大物体在集中力作用下的 Kelvin 解和半无限大物体在集中力作用下的 Mindlin 解。由此证明了本方法的正确性。

## 1 场方程

首先, 我们考虑一层状半无限体中任一单层各向同性介质。假设一任意点荷载作用在离该层上表面为  $h$  处。选取局部直角坐标原点在上表面,  $z$  轴铅垂向下, 如图 1 所示。每一层状介质的场方程为:

$$\text{平衡方程} \quad \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (1)$$

$$\text{本构关系} \quad \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \nu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

注: 本文为国家重点基础研究发展规划“973”项目“中国煤层气成藏机制及经济开采基础研究”(编号 2002CB117009)、国家科技重大专项“大型油气田及煤层气勘探开发”(编号 2008zx05000-14-06)和中国石油 2006 年风险基金(石油大学-02)资助成果。

收稿日期: 2008-05-07; 改回日期: 2008-09-16; 责任编辑: 周健。

作者简介: 张劲, 男, 1963 年生。副教授, 主要从事油气井增产方面的研究。通讯地址: 102249, 中国石油大学(北京)石油天然气工程学院水力压裂实验室; 电话: 010-89734593; Email: zhj718@126.com。

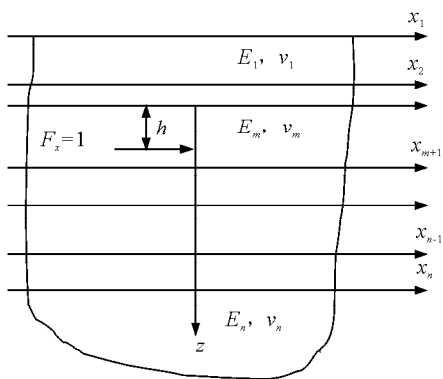


图 1 分层均匀半无限煤层作用沿 X 轴方向的单位点力  
Fig. 1 A unit point force exerted on the multi-layered coal along X axis direction

其中,  $\lambda, \nu$  是弹性常数。选取状态变量为:  $X = [\sigma_{zz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz} \ u_x \ u_y \ u_z]^T$ , 由方程(1)和(2)得到如下状态方程:

状态方程  $\frac{\partial}{\partial z} X = AX + B$  (3)

经二重 Fourier 变换可以得出 Fourier 变换域下的状态微分方程:

$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{X} = \tilde{A} \tilde{X} + \tilde{B}$  (4)

下面我们来讨论矩阵方程求解。在矩阵方程(4)的两边同乘  $e^{-\tilde{A}z}$ , 有:

$\frac{\partial e^{-\tilde{A}z} \tilde{X}(z)}{\partial z} = e^{-\tilde{A}z} \tilde{B}$  (5)

将指数矩阵按下列方式进行分解:

$\tilde{T}(z) \equiv e^{\tilde{A}z} = \tilde{\Phi}[z] \tilde{\Phi}^{-1}[0]$  (6)

将上式代入(5), 且方程的两边前乘  $\tilde{\Phi}^{-1}(0)$ , 化简后得到:

$\tilde{X}(z) = \tilde{\Phi}(z) [\tilde{\Phi}^{-1}(0) \tilde{X}(0) + \int_0^z \tilde{\Phi}^{-1}(s) \tilde{B} ds]$  (7)

这里, 指数矩阵  $e^{\tilde{A}z}$  的表达式可利用 Cayley-Hamilton 定理(Benitez and Rosakis, 1987)求得。

对  $\tilde{T}(z)$  中的元素进行分析可知,  $\tilde{T}(z)$  中的每个元素有如下的一般形式:

$\tilde{t}_{ij} = (\alpha_{ij} + \alpha'_{ij} z) e^{\pm \rho z}$  (8)

其中,  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , 是矩阵  $\tilde{A}$  的特征值。

因此我们可以设矩阵  $\tilde{\Phi}(z)$  中各列元素的表达式如下:

$\tilde{a}_{ij} = (c_{ij} + c'_{ij} z) e^{-\rho z}, \quad j=1, 3, 4$   
 $\tilde{a}_{ij} = (c_{ij} + c'_{ij} z) e^{\rho z}, \quad j=2, 5, 6$  (9)

利用关系式(6), 比较系数可求出  $\tilde{\Phi}(z)$  中  $\tilde{a}_{ij}$  的待定系数。

物理域下的解: 水平面内的各应力分量  $\tilde{\sigma}_{xx}, \tilde{\sigma}_{yy}$

和  $\tilde{\sigma}_{xy}$  也可按照求状态变量的方法, 利用平衡方程(1)和本构关系(2)经 Fourier 变换求得。

在式(7)中, 代入边界条件, 即可求出 Fourier 域下状态变量的解。将 Fourier 域下得出的解进行 Fourier 逆变换即可得出物理域下的解。

2 广义 Mindlin 解

2.1 通解

设层状半无限体的上表面自由, 在离第  $m$  层的上表面为  $h$  处作用一沿  $z$  轴的单位集中力。取局部坐标轴原点在每一层的表面,  $z$  轴方向向下。则:

$\tilde{B} = \left[ -\frac{1}{2\pi} \delta(z-h) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$  (10)

对除  $m$  和  $n$  层的每一层传递方程为:

$\tilde{X}_i(z_i) = \tilde{T}_i[z_i] \tilde{X}_i(0)$  (11)

$m$  层传递方程为:

$\tilde{X}_m(z_m) = \tilde{T}_m[z_m] \tilde{X}_m(0), \quad z_m < h$   
 $\tilde{X}_m(z_m) = \tilde{T}_m[z_m] \tilde{X}_m(0) +$  (12)

$\tilde{\Phi}_m[h] \tilde{\Phi}_m^{-1}[h] \left[ -\frac{1}{2\pi} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad z_m \geq h$  (13)

对半无限层  $n$ , 由于状态变量为有限值, 因此矩阵  $\tilde{\Phi}_n[z]$  中所有含  $e^{\rho z}$  项应置为零。故有:

$\tilde{X}_n(z_n) = \tilde{T}_n[z_n] \tilde{X}_n(0)$   
 $= \tilde{\Phi}_n[h] \tilde{\Phi}_n^{-1}[0] \tilde{X}_n(0)$  (14)

2.2 边界条件的处理

由半无限层的传递方程(14)可得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_x^n(z_n) \\ \tilde{u}_y^n(z_n) \\ \tilde{u}_z^n(z_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{41}^n & \tilde{t}_{42}^n & \tilde{t}_{43}^n & \tilde{t}_{44}^n & \tilde{t}_{45}^n & \tilde{t}_{46}^n \\ \tilde{t}_{51}^n & \tilde{t}_{52}^n & \tilde{t}_{53}^n & \tilde{t}_{54}^n & \tilde{t}_{55}^n & \tilde{t}_{56}^n \\ \tilde{t}_{61}^n & \tilde{t}_{62}^n & \tilde{t}_{63}^n & \tilde{t}_{64}^n & \tilde{t}_{65}^n & \tilde{t}_{66}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{zz}^n(0) \\ \tilde{\sigma}_{zx}^n(0) \\ \tilde{\sigma}_{zy}^n(0) \\ \tilde{u}_x^n(0) \\ \tilde{u}_y^n(0) \\ \tilde{u}_z^n(0) \end{bmatrix}$$
 (15)

在上式中, 令  $z_n=0$ , 则可解得:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}^n(0) \\ \tilde{u}_y^n(0) \\ \tilde{u}_z^n(0) \end{bmatrix} = \tilde{d} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{zz}^n(0) \\ \tilde{\sigma}_{zx}^n(0) \\ \tilde{\sigma}_{zy}^n(0) \end{bmatrix}$$
 (16)

这里,

$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} 1-\tilde{t}_{44}^n & -\tilde{t}_{45}^n & -\tilde{t}_{46}^n \\ -\tilde{t}_{54}^n & 1-\tilde{t}_{55}^n & -\tilde{t}_{56}^n \\ -\tilde{t}_{64}^n & -\tilde{t}_{65}^n & 1-\tilde{t}_{66}^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{t}_{41}^n & \tilde{t}_{42}^n & \tilde{t}_{43}^n \\ \tilde{t}_{51}^n & \tilde{t}_{52}^n & \tilde{t}_{53}^n \\ \tilde{t}_{61}^n & \tilde{t}_{62}^n & \tilde{t}_{63}^n \end{bmatrix}$$
 (17)

从第一层的上表面一直递推到最底层的上表面, 建

立了一个 6 阶矩阵方程。6 个方程 6 个未知数[表面的位移  $\tilde{u}_x^1(0)$ 、 $\tilde{u}_y^1(0)$  和  $\tilde{u}_z^1(0)$  及最底层的应力  $\tilde{\sigma}_{zz}^n(0)$ 、 $\tilde{\sigma}_{zx}^n(0)$  和  $\tilde{\sigma}_{zy}^n(0)$ ]，解出这 6 个未知数，再根据状态传递方程即可得出任意层任意位置的应力状态和位移。

2.3 基本量的求解

由层间完全连接条件可得：

$$\tilde{X}_{i-1}(H_{i-1})=\tilde{X}_i(0) \quad (i=1,2,\cdots n) \quad (18)$$

根据传递矩阵方程和层间连接条件，有：

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(H_1) &= \tilde{T}_1(H_1)\tilde{X}_1(0) \\ \tilde{X}_2(H_2) &= \tilde{T}_2(H_2)\tilde{X}_2(0) \\ &= \tilde{T}_2(H_2)\tilde{T}_1(H_1)\tilde{X}_1(0) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{X}_{m-1}(H_{m-1}) &= \tilde{T}_{m-1}(H_{m-1})\tilde{X}_{m-1}(0) \\ &= \tilde{T}_{m-1}(H_{m-1})\tilde{T}_{m-2}(H_{m-2}) \\ &\quad \cdots \tilde{T}_1(H_1)\tilde{X}_1(0) \end{aligned} \quad (19)$$

当  $z_m \leq h$  时，

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m(z_m) &= \tilde{T}_m(z_m)\tilde{X}_m(0) \\ &= \tilde{T}_m(z_m)\tilde{T}_{m-1}(H_{m-1})\tilde{T}_{m-2}(H_{m-2})\cdots \\ &\quad \tilde{T}_1(H_1)\tilde{X}_1(0) \end{aligned} \quad (20a)$$

当  $z_m \geq h$  时，

$$\begin{aligned} \tilde{X}_m(z) &= \tilde{T}_m(z_m)\tilde{T}_{m-1}(H_{m-1})\tilde{T}_{m-2}(H_{m-2})\cdots \\ &\quad \tilde{T}_1(H_1)\tilde{X}_1(0)+\tilde{\Phi}_m(h)\tilde{f} \end{aligned} \quad (20b)$$

.....

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{n-1}(H_{n-1}) &= \tilde{T}_{n-1}(H_{n-1})\cdots\tilde{T}_m(H_m)\cdots\tilde{T}_1 \\ &\quad (H_1)\tilde{X}_1(0)+\tilde{T}_{n-1}(H_{n-1})\cdots \\ &\quad \tilde{T}_{m+1}(H_{m+1})\tilde{\Phi}_m(h)\tilde{f} \end{aligned} \quad (20c)$$

由层间连接条件  $\tilde{X}_n(0)=\tilde{X}_{n-1}(H_{n-1})$ ，式(20c)可改写为：

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_n \\ \tilde{U}_n \end{bmatrix} = \tilde{T}_N \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_0 \\ \tilde{U}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_f^{\Sigma} \\ \tilde{C}_f^U \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中，

$$\tilde{\Sigma}_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\pi}[(1+e^{2\rho h})+\rho h \frac{(\lambda+G)(3+4\rho h+e^{2\rho h})+4G}{\lambda+2G}]e^{-3\rho h} \\ \frac{i\xi}{4\pi(\lambda+2G)}[\frac{G(1-e^{2\rho h})}{\rho}-h(\lambda+G)(1+4\rho h+e^{2\rho h})-4Gh]e^{-3\rho h} \\ \frac{i\eta}{4\pi(\lambda+2G)}[\frac{G(1-e^{2\rho h})}{\rho}-h(\lambda+G)(1+4\rho h+e^{2\rho h})-4Gh]e^{-3\rho h} \end{bmatrix} \quad (27)$$

将式(27)进行 Fourier 逆变换，即可得出真实解。所得的真实解与经典的 Mindline 解完全一致。现仅验算  $z$  轴正应力，有：

$$\begin{aligned} \tilde{T}_N &= \tilde{T}_{n-1}(H_{n-1})\cdots\tilde{T}_m(H_m)\cdots\tilde{T}_1(H_1) \\ \begin{bmatrix} \tilde{C}_f^{\Sigma} \\ \tilde{C}_f^U \end{bmatrix} &= \tilde{T}_{n-1}(H_{n-1})\cdots\tilde{T}_{m+1}(H_{m+1})\tilde{\Phi}_m(z)\tilde{f} \end{aligned} \quad (21a,b)$$

$\tilde{U}_0, \tilde{U}_n$  分别表示 Fourier 变换空间下自由表面和第  $n$  层上表面的位移； $\tilde{\Sigma}_0, \tilde{\Sigma}_n$  分别表示 Fourier 变换空间下自由表面和第  $n$  层的上表面的应力。

将矩阵方程(21)中传递矩阵分块化简得：

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &= (\tilde{a}\tilde{T}_N^U - \tilde{T}_N^U)^{-1}(\tilde{C}_f^U - \tilde{a}\tilde{C}_f^{\Sigma}) \\ \tilde{\Sigma}_n &= \tilde{T}_N^{\Sigma}(\tilde{a}\tilde{T}_N^U - \tilde{T}_N^U)^{-1}(\tilde{C}_f^U - \tilde{a}\tilde{C}_f^{\Sigma}) \end{aligned} \quad (22a,b)$$

在传递矩阵方程中初始条件  $\tilde{X}_1(0)$  已求出。根据传递矩阵方程，可计算出在 Fourier 变换域下的任一层的应力和位移值，再经过 Fourier 逆变换即可得出真实域中任一层任一点的应力和位移值。

3 基本解的验证及退化

设在离表面距离为  $h$  处作用一与  $z$  轴重合的单位集中力。将半无限体分成两层情况来处理，上层的厚度为  $2h$ ，下层为不含任何力作用的半无限体。

厚度为  $2h$  层的传递方程为：

当  $z_1 \leq h$  时，  
$$\tilde{X}_1(z_1) = \tilde{T}_1(z_1)\tilde{X}_1(0) \quad (23a)$$

当  $h < z_1 \leq 2h$  时，  
$$\tilde{X}_1(z_1) = \tilde{T}_1(z_1)\tilde{X}_1(0) + \tilde{\Phi}_1(h)\tilde{f} \quad (23b)$$

半无限层的传递方程为：

$$\tilde{X}_n(z_n) = \tilde{T}_n(z_n)\tilde{X}_n(0) \quad (24)$$

界面连接条件为：

$$\tilde{X}_1(2h) = \tilde{X}_n(0) \quad (25)$$

由传递方程和连接条件可得：

$$\tilde{X}_1(2h) = \tilde{T}_1(2h)\tilde{X}_1(0) + \tilde{\Phi}_1(2h)\tilde{f} = \tilde{D}_n\tilde{\Sigma}_N \quad (26)$$

将(26)中的各矩阵分块，解得：

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(2h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{4\pi}[(1+e^{2\rho h}) \\ &\quad +\rho h \frac{(\lambda+G)(3+4\rho h+e^{2\rho h})+4G}{\lambda+2G}]e^{-3\rho h} d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \rho \left\{ -\frac{1}{4\pi} [(1 + e^{2\rho h}) + \right. \\ &\rho h \frac{(\lambda + G)(3 + 4\rho h + e^{2\rho h}) + 4G}{\lambda + 2G}] e^{-3\rho h} \left. \right\} J_0(\rho r) d\rho \\ &= \frac{2h^3(\nu - 2) + r^2(2\nu - 1)}{8\pi(1 - \nu)(r^2 + h^2)^{5/2}} + \\ &\frac{r^4 h(1 - 2\nu) + 162h^5(11\nu - 14) + 9r^2 h^3(20\nu - 7)}{8\pi(1 - \nu)(r^2 + 9h^2)^{7/2}} \end{aligned}$$

由此可以看出,上述利用矩阵传递方程推出的结果与经典弹性力学得出的结果(Shames and Pitarresi, 2004)完全一致。利用类似的方法也可求得无限大物体在集中力作用下的 Kelvin 解。

参 考 文 献

范家让. 1996. 强厚度叠层板壳的精确理论. 北京: 科学出版社.  
丁皓江, 等. 1996. 横观各向同性弹性层点力解. 应用数学和力学, 17(4): 297~305.  
Bahar L Y. 1972. Transfer matrix approach to layered systems. Journal of Engineering Mechanics, 98: 1159~1172.  
Benitez F G, Rosakis A J. 1987. Three-dimensional elastostatics of a layer and a layered medium. Journal of Elasticity, 18: 3~50.  
Büfeler H. 1971. Theory of elasticity of a multilayered medium. Journal of Elasticity, 1(2): 126~143.  
Shames I H, Pitarresi J M. 2004. Introduction to Solid Mechanics. Tsinghua University Press.

A Fundamental Solution for Semi-Infinite Layered Coal

ZHANG Jin, MOU Shanbo, ZHANG Shicheng  
*China University of Petroleum, Beijing, 102249*

Abstract

The crack propagation of hydraulic fracturing of coal is actually a fracturing problem of semi-infinite layered media. It is necessary to discover a fundamental solution for layered coal, if the crack propagation of hydraulic fracturing is simulated by finite element or bunduary element method. A transfer matrix differential equation is derived from the three-dimensional equilibrium equations and constitutive equations of a homogeneous, isotropic linear elastic body. The exponential matrix is discomposed in order to avoid non-convergence in solving directly the transfer matrix differential equations. The relations between the displacements and the stresses on the surface of semi-infinite body are obtained in introducing the infinite boundary conditions. The displacements and stresses in an arbitrary point of the semi-infinite body are easily deduced by using the transfer matrix equation. The results derived here can be degenerated to the classic Mindline’s solution in a semi-infinite body.

**Key words:** transfer matrix; integrate transform; fundamental solution